# 泉州市2020届普通高中毕业班第二次质量检查
# 理科数学试题答案及评分参考

**评分说明：**

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则．

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分．

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数．

4．只给整数分数．选择题和填空题不给中间分．

**一、单项选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．A　2．D　3．A　4．D　5．A　6．C

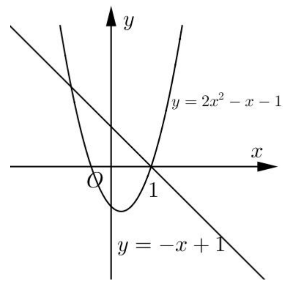
7．B　8．B　9．D　10．B　11．D　12．C

1．【解析】解法一：集合 $A=\{x|-x+1\geqslant 0\}=(-\infty,1]$，$B=\{x|2x^2-x-1\leqslant 0\}=[-\frac{1}{2},1]$，

则 $A\cup B=(-\infty,1]$．故选A．

解法二：如图，分别作出函数 $y=-x+1$，$y=2x^2-x-1$ 的图象，

由图可知，$A\cup B=(-\infty,1]$．故选A．




2．【解析】将 $(x-2)^7$ 展开，得 $C_7^0x^7(-2)^0+C_7^1x^6(-2)^1+C_7^2x^5(-2)^2+\cdots+C_7^7x^0(-2)^7$，

则原展开式中含 $x^6$ 的项为 $(-1)\cdot C_7^1x^6(-2)^1+x\cdot C_7^2x^5(-2)^2$，整理可知其系数为 $98$．故选B．

3．【解析】因为 $|AB|=\sqrt{5},|AC|=2\sqrt{5}$，又因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，所以 $\angle BAC=90^\circ$，

所以 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}=5$．故选A．

4．【解析】由题意，角 $\alpha$ 的终边过点 $M(-3,4)$，求得 $|OM|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$，

由三角函数的定义得 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

所以 $\sin(\pi-2\alpha)=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times(-\frac{3}{5})=-\frac{24}{25}$．故选D．

5．【解析】设“宫”的频率为 $a$，由题意经过一次“损”，可得“徵”的频率是 $\frac{3}{2}a$；“徵”经过一次“益”，可得“商”

的频率是$\frac{9}{8}a$，“商”经过一次“损”，可得“羽”的频率是$\frac{27}{16}a$；最后“羽”经过一次“益”，可得“角”的频率是$\frac{81}{64}a$，由于$a,\frac{9}{8}a,\frac{81}{64}a$成等比数列，所以“宫、商、角”的频率成等比数列．故选 A．

6．【解析】因为 A、B 选项中，图像关于原点对称，所以$f\left(x\right)$为奇函数，$f\left(x\right)+f\left(-x\right)=0$，

即$\ln(\sqrt{x^2+1}-kx)+\ln(\sqrt{x^2+1}+kx)=0$，$\ln(x^2+1-k^2x^2)=\ln 1$，$\left(1-k^2\right)x^2=0$，

所以$k=\pm1$．当$k=1$，$f\left(x\right)$的图像为选项 A；当$k=-1$，$f\left(x\right)$的图像为选项 B．

而 C、D 选项中，图像关于$y$轴对称，所以$f\left(x\right)$为偶函数，$f\left(x\right)=f\left(-x\right)$，

即$\ln(\sqrt{x^2+1}-kx)=\ln(\sqrt{x^2+1}+kx)$，$kx=0$，所以$k=0$．

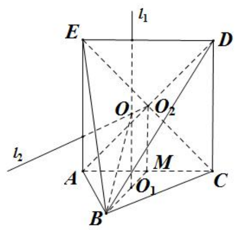
当$k=0$，$f\left(x\right)\geq0$，故$f\left(x\right)$的图像为选项 D，故$f\left(x\right)$的图像不可能为 C．故选 C．

7．【解析】因为$\frac{\pi}{2}<2<\frac{3\pi}{4}$，所以$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin 2<1$，故$0<a<1$，$b>1$，$0<c<1$．

又$a=(\sin 2)^2>\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，$c=\log_{\frac{1}{2}}(\sin 2)<\log_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{2}$，所以$b>a>c$．故选 B．

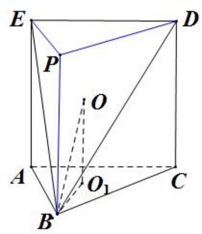
8．【解析】解法一：由三视图可得该几何体为四棱锥$B-ACDE$，平面$ABC\perp$平面$ACDE$．

设等边$\Delta ABC$ 的外接圆圆心为$O_1$，正方形$ACDE$的外接圆圆心为$O_2$，过$O_1$作直线$l_1$垂直平面$ABC$，过$O_2$作直线$l_2$垂直平面$ACDE$，设$l_1\cap l_2=O$，则$O$为该几何体外接球的球心．




取$AC$中点$M$，易得四边形$OO_1MO_2$为矩形，$OO_1=O_2M=1$，

$r=O_1B=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，设所求外接球的半径为$R$，在$Rt\Delta OO_1B$中，$R^2=r^2+OO_1^2=\frac{7}{3}$，$S=4\pi R^2=\frac{28\pi}{3}$．故选 B．




解法二：由三视图可得该几何体为四棱锥$B-ACDE$，平面$ABC\perp$平面$ACDE$，该几何体可补形为棱长均为2的正三棱柱$ABC-EPD$，设等边$\Delta ABC$的外接圆圆心为$O_1$，几何体外接球球心为$O$，易得$OO_1=1$，同解法一，可求得$S=4\pi R^2=\frac{28\pi}{3}$．故选 B．

9． 【解析】设全体投保的渔船为$t$艘．

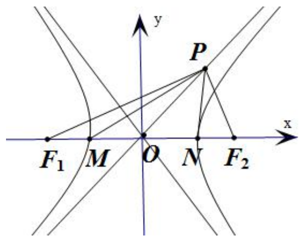
2019 年投保的渔船的台风遭损率为$60\%\cdot15\%+40\%\cdot5\%=11\%$，故 A 错；

2019 年所有因台风遭损的投保的渔船中，I 类渔船所占的比例为$\dfrac{60\%\cdot15\%}{60\%\cdot15\%+40\%\cdot5\%}=\dfrac{9}{11}>\dfrac{8}{10}$，故 B 错；

预估 2020 年 I 类渔船的台风遭损率 $20\%\cdot3\%+80\%\cdot15\%=12.6\%>2\cdot(5\%)$，故 C 错；

预估 2020 年经过进一步改造的渔船因台风遭损的数量 $t\cdot60\%\cdot20\%\cdot3\%$ 少于 II 类渔船因台风遭损的数量 $t\cdot40\%\cdot5\%$．故选 D.

10.【解析】不妨设 $P$ 是渐近线在第一象限上的点，




因为 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，所以 $\angle F_1PF_2=90^\circ$, $|PO|=|OF_2|=c$．

又 $P$ 在渐近线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 上,所以可得 $P$ 点的坐标是 $(a,b)$,所以 $PN\perp F_1F_2$．

在直角三角形 $PNM$ 中，$\angle MPN=\dfrac{\pi}{3}$，

所以 $|MN|=\sqrt{3}|PN|$，即 $2a=\sqrt{3}b,\dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$．

所以 $e=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{4}{3}}=\sqrt{\dfrac{7}{3}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$．故选 B.

11.【解析】因为 $f(x)=5\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $\sin\varphi=\dfrac{4}{5},\cos\varphi=\dfrac{3}{5}$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$）.

令 $t=\omega x+\varphi$，$g(t)=5\sin t$，因为 $\omega>0$，$0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\varphi\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{3}\omega+\varphi$．

因为 $g(\varphi)=4$，且 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $g(\pi-\varphi)=4$，$g(\dfrac{\pi}{2})=5$，

故 $\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{3}\omega+\varphi\leqslant\pi-\varphi$，即 $\dfrac{\pi}{2}-\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{3}\omega\leqslant\pi-2\varphi$．

当 $0<\dfrac{\pi}{2}-\varphi\leqslant x\leqslant\pi-2\varphi<\pi$ 时，$y=\cos x$ 单调递减，

因为 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\dfrac{4}{5},\cos(\pi-2\varphi)=-\cos2\varphi=\sin^2\varphi-\cos^2\varphi=\dfrac{16}{25}-\dfrac{9}{25}=\dfrac{7}{25}$，

所以 $\cos(\dfrac{\pi}{3}\omega)\in\left[\dfrac{7}{25},\dfrac{4}{5}\right]$．故选 D.

12.【解析】取 $AB$ 的点 $O$．因为 $AC\perp CB$，$AD\perp DB$，$AE\perp EB$，所以 $OA=OB=OC=OD=OE$，故点 $C,D,E$ 在以 $AB$ 为直径的球面 $O$ 上.

设 $A,B$ 到平面 $CDE$ 的距离分别为 $d_1,d_2$，则 $d_1+d_2\leqslant AB$，

所以该多面体的体积$V=V_{A-CDE}+V_{B-CDE}=\frac{1}{3}S_{\triangle CDE}\cdot(d_1+d_2)\leqslant\frac{1}{3}S_{\triangle CDE}\cdot AB$，

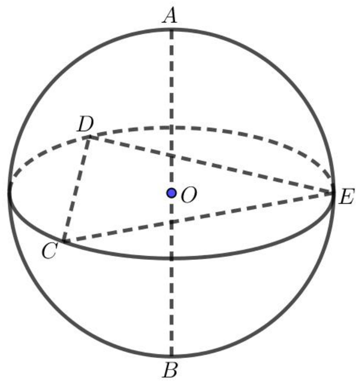
过点$C,D,E$作球的截面圆$O'$，设圆$O'$的半径为$r$，则$r\geqslant3$，且$r\leqslant\frac{1}{2}AB$即$r\leqslant5$，所以$3\leqslant r\leqslant5$，

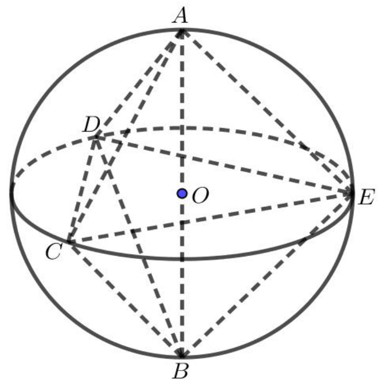
又点$E$到$CD$的距离最大值为$r+\sqrt{r^2-\left(\frac{CD}{2}\right)^2}=r+\sqrt{r^2-9^2}$，

所以$S_{\triangle CDE}\leqslant\frac{1}{2}\times6\times(r+\sqrt{r^2-9})=3(r+\sqrt{r^2-9})$，

因为函数$f(r)=r+\sqrt{r^2-9}$在$[3,5]$单调递增，所以$f(r)_{\max}=f(5)=5+4=9$，

从而$V\leqslant\frac{10}{3}S_{\triangle CDE}\cdot AB\leqslant\frac{10}{3}\times3\times9=90$．故选 C.



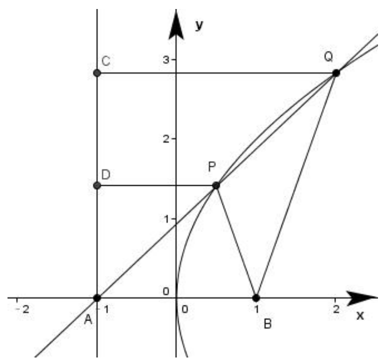




**二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．将答案填在答题卡的相应位置．**

13．$-5\mathrm{i}$　　14．$\frac{1}{2}$　　15．$\sqrt{3}+1$　　16．2

13．【解析】由题意，得$z_1=1+2\mathrm{i}$，$z_2=2-\mathrm{i}$，所以$\overline{z_1}=1-2\mathrm{i}$，故$\overline{z_1}\cdot z_2=(1-2\mathrm{i})\cdot(2-\mathrm{i})=-5\mathrm{i}$．

14．【解析】易知抛物线$y^2=4x$的焦点$B$，准线$x=-1$．




分别作点$P$、$Q$到准线的垂线段，垂足分别为点$D$、$C$．

根据抛物线的定义，有$|PB|=|PD|$，$|QB|=|QC|$，

因为$PD//QC$，且$P$为$AQ$中点，

所以$PD$是$\triangle AQC$的中位线，$|PD|=\frac{1}{2}|QC|$，

即$|PB|=\frac{1}{2}|QB|$，故$\frac{|PB|}{|QB|}=\frac{1}{2}$．

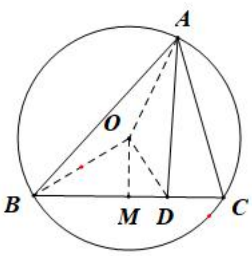
15．【解析】解法一：在$\Delta ABC$中，由正弦定理得$\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$，因为$\sin B\neq0$，所以$\tan A=\sqrt{3}$，又因为$0<A<\pi$，所以$A=\frac{\pi}{3}$；设$\Delta ABC$外接圆的圆心为$O$，半径为$R$，则由正弦定

理得$R=\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{3}{2\times\sin\dfrac{\pi}{3}}=\sqrt{3}$，如图所示，取$BC$的中点$M$，

在$\mathrm{Rt}\Delta BOM$中，$BM=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{3}{2}$，$OM=\sqrt{OB^2-BM^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\dfrac{3}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

在$\mathrm{Rt}\Delta DOM$中，$DM=BD-BM=\dfrac{1}{2}$，$OD=\sqrt{OM^2+DM^2}=\sqrt{(\dfrac{\sqrt{3}}{2})^2-(\dfrac{1}{2})^2}=1$；

$AD\le AO+OD=R+OD=\sqrt{3}+1$，当且仅当圆心$O$在$AD$上时取等号，所以$AD$的最大值是$\sqrt{3}+1$，故答案为$\sqrt{3}+1$.




解法二：在$\Delta ABC$中，由正弦定理得$\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A$，因为$\sin B\neq 0$，所以$\tan A=\sqrt{3}$，又因为$0<A<\pi$，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$；由正弦定理得$b=2\sqrt{3}\sin B$，$c=2\sqrt{3}\sin C$，在$\Delta ABD$中，

$\cos B=\dfrac{BA^2+BD^2-AD^2}{2BA\cdot BD}=\dfrac{c^2+4-AD^2}{4c}$.

在$\Delta ABC$中，$\cos B=\dfrac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA\cdot BC}=\dfrac{c^2+9-b^2}{6c}$，所以$\dfrac{c^2+4-AD^2}{4c}=\dfrac{c^2+9-b^2}{6c}$整理得$AD^2=\dfrac{2}{3}b^2+\dfrac{1}{3}c^2-2$；

所以$AD^2=\dfrac{2}{3}(2\sqrt{3}\sin B)^2+\dfrac{1}{3}(2\sqrt{3}\sin C)^2-2=8\sin^2 B+4\sin^2 C-2$

$=4-4\cos 2B-2\cos 2C=4-4\cos 2B+2\cos(\dfrac{\pi}{3}-2B)=4+\sqrt{3}\sin 2B-3\cos 2B$

$=4+2\sqrt{3}\sin(2B-\dfrac{\pi}{3})$，当$\sin(2B-\dfrac{\pi}{3})=1$即$B=\dfrac{5\pi}{12}$时，$AD^2$取得最大值$4+2\sqrt{3}$，所以$AD$的最大值为$\sqrt{3}+1$.

16．【解析】$f'(x)=1+e^x$，$g'(x)=1+e^{a-x}$，设直线$l$与函数$f(x)$的图象相切于点$(x_1,x_1+e^{x_1})$，则切线斜率$k_1=1+e^{x_1}$，切线$l$的方程为$y-(x_1+e^{x_1})=(1+e^{x_1})(x-x_1)$.

设直线$l$与函数$g(x)$的图象相切于点$(x_2,x_2-e^{a-x_2})$，则切线斜率$k_2=1+e^{a-x_2}$，切线$l$的方程为

$y-(x_2-e^{a-x_2})=(1+e^{a-x_2})(x-x_2)$ .

因为过点$(1,\frac{a}{2})$的直线$l$与函数$f(x)=x+e^x$，$g(x)=x+e^{a-x}$的图象都相切，

所以$\begin{cases} 1+e^{x_1}=1+e^{a-x_2}\cdots(1) \\ \frac{a}{2}-(x_1+e^{x_1})=(1+e^{x_1})(1-x_1)\cdots(2) \\ \frac{a}{2}-(x_2-e^{a-x_2})=(1+e^{a-x_2})(1-x_2)\cdots(3) \end{cases}$

由（1）得$x_1=a-x_2$，将$x_2=a-x_1$代入（3）得$\frac{a}{2}-(a-x_1-e^{x_1})=(1+e^{x_1})(1+x_1-a)$，

所以$-\frac{a}{2}+(x_1+e^{x_1})=(1+e^{x_1})(1+x_1-a)\cdots(4)$；由（2）+（4）得$(1+e^{x_1})(2-a)=0$，

因为$1+e^{x_1}\neq 0$，所以$a=2$.

**三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．**

**（一）必考题：共 60 分．**

17．本小题主要考查数列递推关系、数列求和等基础知识，考查推理论证能力和运算求解能力等，考查化归与转化思想，体现综合性与应用性，导向对发展逻辑推理、数学运算及数学建模等核心素养的关注．满分 12 分．

解法一：（1）由$2S_n=(n+1)a_n$得$2S_n=(n+1)(S_n-S_{n-1})$，（$n\geq 2,n\in N^*$）. ............................................ 1 分

整理得$(n-1)S_n=(n+1)S_{n-1}$，即$S_n=\frac{n+1}{n-1}S_{n-1}$，...................................................................2 分

所以$S_n=\frac{n+1}{n-1}S_{n-1}=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}S_{n-2}=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-3}S_{n-3}$ ..................................................3 分

$=\cdots=\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdots\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{1}S_1=\frac{n(n+1)}{2}a_1=n(n+1)$ . .................................. 5 分

因为$S_1=a_1=2$，所以$S_1$也满足$S_n=n(n+1)$，

所以$S_n=n(n+1)$（$n\in N^*$）. ........................................................................................................ 6 分

（2）$b_n=\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}\cdot S_n}=\frac{S_{n+1}-S_n}{S_{n+1}\cdot S_n}=\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}$ ........................................................................................... 7 分

$=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$，.......................................................................................................8 分

$=(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})-(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$ . ...............................................................................................9 分

$T_n=[(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})]+[(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})-(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})]+[(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})-(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})]+\cdots$

$+[(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})-(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})]+[(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})-(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})]$. ……………………10 分

$=(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})-(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$. …………………… 11 分

因为 $n\in \mathrm{N}^*$，所以 $T_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}<\frac{1}{2}$. …………………… 12 分

解法二：（1）由 $2S_n=(n+1)a_n$ 得 $2S_n=(n+1)(S_n-S_{n-1})$，（$n\geq 2,n\in N^*$）. ……………………1 分

整理得 $(n-1)S_n=(n+1)S_{n-1}$ 即 $\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$， ……………………2 分

所以 $\frac{S_2}{S_1}=\frac{3}{1}$， $\frac{S_3}{S_2}=\frac{4}{2}$， $\frac{S_4}{S_3}=\frac{5}{3}$，……， $\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$. …………………… 3 分

将以上 $n-1$ 个等式累乘整理得 $\frac{S_n}{S_1}=\frac{n(n+1)}{2}$， …………………… 4 分

又因为 $S_1=a_1=2$，所以 $S_n=n(n+1)$. …………………… 5 分

因为 $S_1=a_1=2$，所以 $S_1$ 也满足 $S_n=n(n+1)$，

所以 $S_n=n(n+1)$（$n\in N^*$）. …………………… 6 分

（2）同解法一.

解法三：（1）由 $2S_n=(n+1)a_n$ 得 $2S_{n-1}=na_{n-1}$，（$n\geq 2,n\in N^*$）. ……………………1 分

两式相减得 $2(S_n-S_{n-1})=(n+1)a_n-na_{n-1}$，整理得 $a_n=\frac{n}{n-1}a_{n-1}$， ……………………2 分

所以 $a_{\mathrm{n}}=\frac{n}{n-1}a_{n-1}=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}a_{n-2}=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}a_{n-3}$ ……………………3 分

$=\cdots=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdots\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}a_1=n\times 2=2n$. ……………………4 分

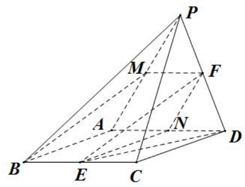
因为 $a_1=2$，所以 $a_1$ 也满足 $a_n=2n$， ……………………5 分

所以 $S_n=\frac{(n+1)\ a_n}{2}=\frac{2n(n+1)}{2}=n(n+1)$（$n\in N^*$）. …………………… 6 分

（2）同解法一.

18．本小题主要考查线面平行、面面平行、面面垂直，直线与平面所成的角度等基础知识，考查推理论证能力和运算求解能力等，考查数形结合思想和化归与转化思想等，体现综合性与应用性，导向对发展直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养的关注．满分 12 分．

解法一：（1）取 $PA$ 中点 $M$，连接 $BM,MF$，……1 分




$\because M,F$ 分别是 $PA,PD$ 的中点，$\therefore MF // AD$,且 $MF=\dfrac{1}{2}AD$，

菱形 $ABCD$ 中，$E$ 是 $BC$ 的中点，$\therefore BE // AD$,且 $BE=\dfrac{1}{2}AD$，

$\therefore MF // BE$，且 $MF=BE$，

$\therefore$ 四边形 $MBEF$ 是平行四边形，……3 分

$\therefore EF // BM$，……4 分

又 $EF\not\subset$ 平面 $PAB$，$BM\subset$ 平面 $PAB$,

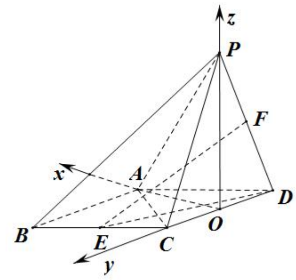
$\therefore EF //$ 平面 $PAB$．……5 分

(2)取 $CD$ 中点 $O$，连接 $PO$，$AO$，$AC$，，

$\because PC=PD$，$\therefore PO\perp CD$．

$\because$ 平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$，$PO\subset$ 平面 $PCD$，

$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$，……6 分




则 $\angle PBO$ 为 $PB$ 与平面 $ABCD$ 所成的角，即 $\angle PBO=45^\circ$．

在 $\Delta BCO$ 中，$BC=2,CO=1,\angle BCO=120^\circ$，

$\therefore BO^2=2^2+1^2-2\times1\times2\times\cos120^\circ=7$，$\therefore BO=\sqrt{7}$，

$Rt\Delta POB$ 中，

$\dfrac{PO}{BO}=\tan45^\circ=1$，$PO=\sqrt{7}$．……7 分

如图，分别以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OP}$ 所在方向为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴的正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $C(0,1,0),P(0,0,\sqrt{7}),D(0,-1,0),B(\sqrt{3},2,0),E(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0)$，

$\therefore \overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,-1,\sqrt{7}),\ \overrightarrow{DE}=(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{5}{2},0)$.……8 分

设平面 $PBC$ 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{CP}\cdot\vec{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0,\\ -y+\sqrt{7}z=0,\end{cases}$

令 $x=-\sqrt{7}$，$\vec{n}=(-\sqrt{7},\sqrt{21},\sqrt{3})$. ........................................ 10 分

设 $DE$ 与平面 $PBC$ 所成角为 $\alpha$，

$$\sin\alpha=\left|\cos<\overrightarrow{DE},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{DE}\right|\times\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|-\frac{\sqrt{21}}{2}+\frac{5\sqrt{21}}{2}\right|}{\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{25}{4}}\times\sqrt{7+21+3}}=\frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{7}\times\sqrt{31}}=\frac{2\sqrt{93}}{31},$$

$\therefore$ 直线 $DE$ 与平面 $PBC$ 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{93}}{31}$ ........................................ 12 分

解法二：（1）取 $AD$ 中点 $N$，连接 $NE,NF$， ........................................ 1 分

$\because N,F$ 分别是 $AD,PD$ 的中点，$\therefore NF//PA$，

又 $NF\not\subset$ 平面 $PAB$，$PA\subset$ 平面 $PAB$，$\therefore NF$ //平面 $PAB$. ........................................ 2 分

$\because N,E$ 分别是 $AD,BC$ 的中点，$\therefore AN//BE$ 且 $AN=BE$，

$\therefore$ 四边形 $ABEN$ 是平行四边形，$\therefore NE//AB$，

又 $NE\not\subset$ 平面 $PAB$，$AB\subset$ 平面 $PAB$，$\therefore NE$ //平面 $PAB$； ........................................ 3 分

$\because NE\bigcap NF=N, NE\subset$ 平面 $NEF$，$NF\subset$ 平面 $NEF$，

$\therefore$ 平面 $NEF$ // 平面 $PAB$， ........................................ 4 分

又 $\because EF\subset$ 平面 $NEF$，$\therefore EF//$ 平面 $PAB$. ........................................ 5 分

（2）取 $CD$ 中点 $O$，连接 $PO$，$BO$，

$\because PC=PD$，$\therefore PO\perp CD$,

$\because$ 平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PCD\bigcap$ 平面 $ABCD=CD$, $PO\subset$ 平面 $PCD$,

$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD$. ........................................ 6 分

则 $\angle PBO$ 为 $PB$ 与平面 $ABCD$ 所成的角，即 $\angle PBO=45^\circ$.

在 $\Delta BCO$ 中，$BC=2, CO=1, \angle BCO=120^\circ$，

$\therefore BO^2=2^2+1^2-2\times1\times2\times\cos120^\circ=7$，$\therefore BO=\sqrt{7}$.

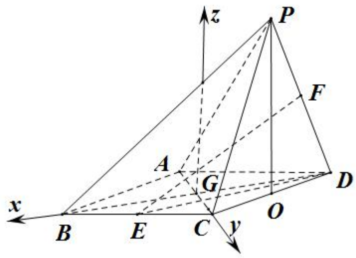
$Rt\Delta POB$ 中，

$\dfrac{PO}{BO}=\tan 45^{\circ}=1$，$PO=\sqrt{7}$ .……………………………………………………………7 分

连接 $AC,BD$，设 $AC\bigcap BD=G$，分别以 $\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{GC}$，$\overrightarrow{OP}$ 所在方向为 $x$ 轴，$y$ 轴，$z$ 轴的正方向建立空间直角坐标系 $G-xyz$，

则 $B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(-\sqrt{3},0,0)$，$P(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},\sqrt{7})$，$E(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0)$,

$\therefore \overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{CP}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},\sqrt{7})$, $\overrightarrow{DE}=(\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0)$. ……………………………………8 分




设平面 $PBC$ 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot\vec{n}=0,\\ \overrightarrow{CP}\cdot\vec{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y=0,\\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y+\sqrt{7}z=0,\end{cases}$

令 $x=\sqrt{7}$，$\vec{n}=(\sqrt{7},\sqrt{21},\sqrt{3})$，……………………………………………………………10 分

设 $DE$ 与平面 $PBC$ 所成角为 $\alpha$，

$$\sin\alpha=\left|\cos<\overrightarrow{DE},\vec{n}>\right|=\frac{\left|\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{DE}\right|\times\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|\dfrac{3\sqrt{21}}{2}+\dfrac{\sqrt{21}}{2}+0\right|}{\sqrt{\dfrac{27}{4}+\dfrac{1}{4}}\times\sqrt{7+21+3}}=\frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{7}\times\sqrt{31}}=\frac{2\sqrt{93}}{31},$$

$\therefore$ 直线 $DE$ 与平面 $PBC$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{2\sqrt{93}}{31}$ ……………………………………………………12 分

19．本小题主要考查椭圆标准方程及简单几何性质，直线与椭圆的位置关系等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力；考查数形结合思想，函数与方程思想等；考查直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养；体现基础性，综合性与创新性．满分 12 分．

解法一：（1）设 $P\left(x,y\right)$，则 $\left|PA\right|^2=\left|PO\right|^2-3=x^2+y^2-3$，……………………………………2 分

$\left|PB\right|^2=x^2$，……………………………………………………………………………………3 分

由 $\left|PB\right|=2\left|PA\right|$ 得，$\left|PB\right|^2=4\left|PA\right|^2$，所以 $x^2=4\left(x^2+y^2-3\right)$，……………………………4 分

化简得 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$． 故点 $P$ 的轨迹 $E$ 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$（$x\neq 0$）.

（2）当直线 $PA$ 的斜率不存在时，不满足题意. ……………………………………………………5 分

设直线 $PA: y=kx+m$ ， $P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$.

由直线 $PA$ 与圆 $O$ 相切，可得 $\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$ ， $m^2=3\left(k^2+1\right)$. ……………………………………6 分

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 得 $\left(3+4k^2\right)x^2+8kmx+\left(4m^2-12\right)=0$ ， ……………………………………7 分

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8km}{3+4k^2},\\ x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}.\end{cases}$ ……………………………………………………8 分

由 $S_{\triangle POA}=2S_{\triangle QOA}$ 得， $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times|PA|=2\left(\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times|QA|\right)$ ， $|PA|=2|QA|$ ， $|x_1|=2|x_2|$ .

因为 $x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}=\dfrac{12k^2}{3+4k^2}>0$ ，所以 $x_1=2x_2$ . ……………………………………10 分

因为 $\dfrac{\left(x_1+x_2\right)^2}{x_1x_2}=\dfrac{\left(\dfrac{-8km}{3+4k^2}\right)^2}{\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}}=\dfrac{16k^2m^2}{\left(3+4k^2\right)\left(m^2-3\right)}=\dfrac{16\left(k^2+1\right)}{3+4k^2}$ ，

$\dfrac{\left(x_1+x_2\right)^2}{x_1x_2}=\dfrac{\left(2x_2+x_2\right)^2}{2x_2^2}=\dfrac{9}{2}$ ，

所以 $\dfrac{16\left(k^2+1\right)}{3+4k^2}=\dfrac{9}{2}$ ， $k=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ， $m=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ .

故直线 $PA$ 的方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ . ……………………………………12 分

解法二：（1）同解法一. ……………………………………………………………………4 分

（2）当直线 $PA$ 的斜率不存在时，不满足题意. ……………………………………………………5 分

设直线 $PA: y=kx+m$ ， $P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$.

由直线 $PA$ 与圆 $O$ 相切，可得 $\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$ ， $m^2=3\left(k^2+1\right)$. ……………………………………6 分

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$得$\left(3+4k^2\right)x^2+8kmx+\left(4m^2-12\right)=0$，……7分

所以$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8km}{3+4k^2},\\ x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}.\end{cases}$ ……8分

由$S_{\triangle POA}=2S_{\triangle QOA}$得，$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times|PA|=2\left(\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times|QA|\right)$，$|PA|=2|QA|$，

又$|PA|=\sqrt{|OP|^2-3}$，$|QA|=\sqrt{|OQ|^2-3}$，

所以$4|OQ|^2-|OP|^2=9$，$4\left(x_1^2+y_1^2\right)-\left(x_2^2+y_2^2\right)=9$，

$4\left(x_1^2+y_1^2\right)-\left(x_2^2+y_2^2\right)=9$，$|x_1|=2|x_2|$.

因为$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}=\dfrac{12k^2}{3+4k^2}>0$，所以$x_1=2x_2$. ……10分

因为$\dfrac{\left(x_1+x_2\right)^2}{x_1x_2}=\dfrac{\left(\dfrac{-8km}{3+4k^2}\right)^2}{\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}}=\dfrac{16k^2m^2}{\left(3+4k^2\right)\left(m^2-3\right)}=\dfrac{16\left(k^2+1\right)}{3+4k^2}$，

$\dfrac{\left(x_1+x_2\right)^2}{x_1x_2}=\dfrac{\left(2x_2+x_2\right)^2}{2x_2^2}=\dfrac{9}{2}$，

所以$\dfrac{16\left(k^2+1\right)}{3+4k^2}=\dfrac{9}{2}$，$k=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$m=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

故直线$PA$的方程为$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$或$y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. ……12分

解法三：（1）同解法一. ……4分

（2）当直线$PA$的斜率不存在时，不满足题意. ……5分

设直线$PA: y=kx+m$，$A\left(x_0,y_0\right)$，$P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$.

由$\begin{cases}x^2+y^2=3,\\ y=kx+m,\end{cases}$得$\left(1+k^2\right)x^2+2kmx+\left(m^2-3\right)=0$，

由$\triangle=0$得，$(2km)^2-4\left(1+k^2\right)\left(m^2-3\right)=0$，$m^2=3\left(k^2+1\right)$……①. ……6分

且 $x_0=\dfrac{-km}{1+k^2}$。

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 得 $\left(3+4k^2\right)x^2+8kmx+\left(4m^2-12\right)=0$，……7 分

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8km}{3+4k^2},\\ x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}.\end{cases}$ ……②……8 分

由 $S_{\triangle POA}=2S_{\triangle QOA}$ 得，$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times|PA|=2\left(\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times|QA|\right)$，$|PA|=2|QA|$，

所以 $x_1-x_0=2\left(x_0-x_2\right)$，

$x_1+2x_2=3x_0$，$x_1+2x_2=\dfrac{-24km}{1+k^2}$ ……③。……10 分

由①②③，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$m=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$．

故直线 $PA$ 的方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 或 $y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$．……12 分

20．本小题主要考查超几何分布、不等式、回归分析、正态分布等基础知识；考查抽象概括能力、数据处理能力、运算求解能力、推理论证能力、创新意识；考查统计与概率思想、化归与转化思想；考查数学运算素养、数学建模素养、数据分析素养，体现基础性、综合性、创新性与应用性．

解法一：（1）预测试成绩在 $[25,35)\cup[85,95]$ 的员工中，接受方案 A 测试的有 $100\times(0.02+0.03)=5$ 人；

接受方案 B 测试的有 $100\times(0.16+0.04)=20$ 人．……1 分

依题意，随机变量 $X$ 服从超几何分布，记这 6 人中接受方案 A 预测试的人数为 $k$，

则 $P(X=k)=\dfrac{C_5^k\cdot C_{20}^{6-k}}{C_{25}^6}$，其中 $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$．……3 分

$C_5^1\cdot C_{20}^5>C_5^2\cdot C_{20}^4>C_5^0\cdot C_{20}^6>C_5^3\cdot C_{20}^3>C_5^4\cdot C_{20}^2>C_5^5\cdot C_{20}^1$，

得 $P(x=k)_{\max}=P(x=1)$，即 $X=1$ 的可能性最大，故 $X$ 最有可能的取值为 $1$．……4 分

（2）（ⅰ）依题意，$y=\lambda\cdot\mathbf{e}^{\mu x}$ 两边取对数，得 $\ln y=\mu x+\ln\lambda$，即 $z=\mu x+\ln\lambda$．……5 分

其中 $\overline{x}=63$，……6 分

由提供的参考数据，可知 $\mu=0.02$，又 $-0.642=0.02\times63+\ln\lambda$，故 $\ln\lambda\approx-1.9$，

由提供的参考数据，可得 $\lambda\approx0.15$ ....................................................................................7 分

故 $\hat{y}=0.15\cdot\mathbf{e}^{0.02x}$，当 $x=60$ 时，$\hat{y}\approx0.498$． ....................................................................8 分

（ii）由（i）及提供的参考数据可知，$\mu\approx\overline{x}=63$，$\sigma\approx s\approx20$．

$y\geq0.78$，即 $0.15\cdot\mathbf{e}^{0.02x}\geq0.78$，可得 $0.02x\geq\ln5.2$，即 $x\geq83$． ........................................9 分

又 $\mu+\sigma=83$，且 $P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.6826$， ........................................................ 11 分

由正态分布的性质，得 $P(x\geq83)=\dfrac{1}{2}[1-P(\mu-\sigma<x<\mu+\sigma)]=0.1587$，

记"绩效等级优秀率不低于 $0.78$"为事件 $A$，则 $P(A)=P(x\geq83)=0.1587$，

所以绩效等级优秀率不低于 $0.78$ 的概率等于 $0.1587$． .................................................................12 分

解法二：(1) 预测试成绩在 $[25,35)\cup[85,95]$ 的员工中，接受方案 A 测试的有 $100\times(0.02+0.03)=5$ 人；

接受方案 B 测试的有 $100\times(0.16+0.04)=20$ 人． ............................................................... 1 分

依题意，随机变量 $X$ 服从超几何分布，记这 6 人中接受方案 A 预测试的人数为 $k$，

则 $P(X=k)=\dfrac{C_5^k\cdot C_{20}^{6-k}}{C_{25}^6}$，其中 $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$． .........................................................3 分

由 $\begin{cases}P(X=k)\geq P(X=k-1),\\P(X=k)\geq P(X=k+1),\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\dfrac{C_5^k\cdot C_{20}^{6-k}}{C_{25}^6}\geq\dfrac{C_5^{k-1}\cdot C_{20}^{7-k}}{C_{25}^6},\\\dfrac{C_5^k\cdot C_{20}^{6-k}}{C_{25}^6}\geq\dfrac{C_5^{k+1}\cdot C_{20}^{5-k}}{C_{25}^6},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}C_5^k\cdot C_{20}^{6-k}\geq C_5^{k-1}\cdot C_{20}^{7-k},\\C_5^k\cdot C_{20}^{6-k}\geq C_5^{k+1}\cdot C_{20}^{5-k},\end{cases}$

即 $\begin{cases}\dfrac{1}{k\cdot(14+k)}\geq\dfrac{1}{(6-k)\cdot(7-k)},\\\dfrac{1}{(5-k)\cdot(6-k)}\geq\dfrac{1}{(k+1)\cdot(15+k)},\end{cases}$ 求得 $\dfrac{15}{27}\leq k\leq\dfrac{14}{9}$，

故 $X$ 最有可能的取值为 $1$． ........................................................................................................4 分

（2）同解法 1．

21．本小题主要考查函数的单调性与极值、导数的应用等基础知识，考查抽象概括能力、推理论证能力、运算求解能力，考查函数与方程思想、化归与转化思想、分类与整合思想、数形结合等思想，考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养，体现综合性、应用性与创新性．满分 12 分．

解析：(1) $f'(x)=(x-a)\ln x$． ...................................................................................................1 分

因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，所以 $f'(x)\ge 0$，即 $(x-a)\ln x\ge 0$．......2 分

（i）当 $x>1$ 时，$\ln x>0$，则需 $x-a\ge 0$，故 $a\le x_{\min}$，即 $a\le 1$；......3 分

（ii）当 $x=1$ 时，$\ln x=0$，则 $a\in\mathbf{R}$；......4 分

（iii）当 $0<x<1$ 时，$\ln x<0$，则需 $x-a\le 0$，故 $a\ge x_{\max}$，即 $a\ge 1$．

综上述，$a=1$．......5 分

（2）$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}=(\dfrac{1}{2}x-a)\ln x-\dfrac{1}{4}x+a$，$g'(x)=\dfrac{1}{2}\ln x-\dfrac{a}{x}+\dfrac{1}{4}$，$g''(x)=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{a}{x^2}$．

因为 $\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{3}{4}\mathrm{e}$，所以 $g''(x)>0$，所以 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增．......6 分

又因为 $g'(1)=-a+\dfrac{1}{4}<0$，$g'(\mathrm{e})=-\dfrac{a}{\mathrm{e}}+\dfrac{3}{4}>0$，

所以存在 $x_0\in(1,\mathrm{e})$，使 $g'(x_0)=0$，......7 分

且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，函数 $g(x)$ 单调递增．

故 $g(x)$ 最小值为 $g(x_0)=(\dfrac{1}{2}x_0-a)\ln x_0-\dfrac{1}{4}x_0+a=h(a)$．......8 分

由 $g'(x_0)=0$，得 $a=\dfrac{1}{2}x_0\ln x_0+\dfrac{1}{4}x_0$，因此 $h(a)=(\dfrac{3}{4}x_0-\dfrac{1}{2}x_0\ln x_0)\ln x_0$．......9 分

令 $\tau(x)=\dfrac{1}{2}x\ln x+\dfrac{1}{4}x$，$x\in(1,\mathrm{e})$，则 $\tau'(x)=\dfrac{1}{2}\ln x+\dfrac{3}{4}>0$，

所以 $\tau(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递增．

又因为 $\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{3}{4}\mathrm{e}$，且 $\tau(1)=\dfrac{1}{4},\tau(\mathrm{e})=\dfrac{3}{4}\mathrm{e}$，

所以 $1<x_0<\mathrm{e}$，即 $x_0$ 取遍 $(1,\mathrm{e})$ 的每一个值．......10 分

令 $\varphi(x)=(\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}x\ln x)\ln x$（$1<x<\mathrm{e}$），

则 $\varphi'(x)=-\dfrac{1}{2}\ln^2 x-\dfrac{1}{4}\ln x+\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{4}(2\ln x+3)(\ln x-1)>0$，

故函数 $\varphi(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 单调递增．......11 分

又 $\varphi(1)=0$，$\varphi(\mathrm{e})=\dfrac{\mathrm{e}}{4}$，所以 $0<\varphi(x)<\dfrac{\mathrm{e}}{4}$，故函数 $h(a)$ 的值域为 $\left(0,\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)$．......12 分

**（二）选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．**

22．选修 $4-4$：坐标系与参数方程

本小题主要考查参数方程和普通方程，极坐标方程和直角坐标方程的互化，曲线的伸缩变换等基础知识，考查数形结合思想、化归与转化思想，考查直观想象、数学运算等核心素养，体现基础性、综合性，满分 10 分.

解法一：（1）由 $\rho=\dfrac{4}{2\sin\theta-\cos\theta}$ 得 $2\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=4$.

把 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入上式可得直线 $l$ 的直角坐标方程为 $x-2y+4=0$. ................2 分

因为圆 $C_1$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=2\sin\theta\end{cases}(\theta为参数)$. ................3 分

设 $(x_0,y_0)$ 为圆 $C_1$ 上任意一点，在已知的变换下变为 $C_2$ 上的点 $(x,y)$，则有 $\begin{cases}x=x_0,\\ y=\dfrac{1}{2}y_0,\end{cases}$ ........4 分

因为 $\begin{cases}x_0=2\cos\theta,\\ y_0=2\sin\theta\end{cases}(\theta为参数)$，所以 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ 2y=2\sin\theta\end{cases}$,

曲线 $C_2$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}(\theta为参数)$.

可得普通方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ................5 分

（2）不妨设 $A(-4,0), B(0,2)$，所以 $|AB|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.

设 $Q(2\cos\theta,\sin\theta)$，令 $Q$ 点到直线 $l$ 的距离为 $d$，

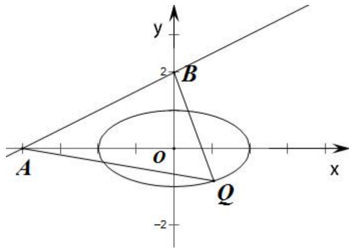
则△$QAB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times|AB|\times d$，................6 分

$$d=\frac{|2\cos\theta-2\sin\theta+4|}{\sqrt{5}}=\frac{\left|2\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+4\right|}{\sqrt{5}}$$ ................7 分

当且仅当 $\cos(\theta+\dfrac{\pi}{4})=1$，即 $\theta=\dfrac{7\pi}{4}$ 时，$d_{\max}=\dfrac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{5}}$，................8 分

所以 $S_{\max}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{5}}=4+2\sqrt{2}$，................9 分

所以 $\Delta QAB$ 面积的最大值 $4+2\sqrt{2}$，相应 $Q$ 点的坐标为 $\left(\sqrt{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. ................10 分




解法二：（1）由 $\rho=\dfrac{4}{2\sin\theta-\cos\theta}$ 得 $2\rho\sin\theta-\rho\cos\theta=4$．

把 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入上式可得直线 $l$ 的直角坐标方程为 $x-2y+4=0$． ……………2 分

把圆 $C_1$: $\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）化为普通方程为 $x^2+y^2=4$． ……………3 分

设 $(x_0,y_0)$ 为圆 $C_1$ 上任意一点，在已知的变换下变为 $C_2$ 上的点 $(x,y)$，

则有 $\begin{cases}x=x_0\\ y=\dfrac{1}{2}y_0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_0=x\\ y_0=2y\end{cases}$． ……………4 分

又 $x_0^2+y_0^2=4$，所以 $x^2+(2y)^2=4$，曲线 $C_2$ 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$． ……………5 分

（2）同解法一．

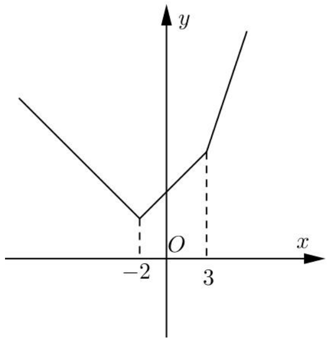
23．选修 $4-5$：不等式选讲

本小题主要考查绝对值不等式、均值不等式等基础知识，考查运算求解能力，考查函数与方程思想、分类与整合思想、数形结合思想，考查数学运算等核心素养，体现基础性、综合性．满分 10 分．

解法一：（1）当 $m=1$ 时，$f(x)=|x+2|+|x-3|+x$，

所以 $f(x)=|x+2|+|x-3|+x=\begin{cases}3x-1, x\geqslant 3,\\ x+5, -2\leqslant x<3,\\ -2x+1, x<-2,\end{cases}$ 且 $f(3)=8$，$f(-2)=3$， ……………2 分

作出函数 $f(x)$ 的图象，如图，




……………3 分

令 $-2x+1=8$，解得 $x=-\dfrac{7}{2}$， ……………4 分

由图可知 $f(x)\leqslant 8$ 的解集为 $[-\frac{7}{2},3]$． ……………………………………………………………5 分

（2）因为 $|x+2|+|x-3|\geqslant|(x+2)-(x-3)|=5$， ……………………………………………7 分

当且仅当 $(x+2)(x-3)\leqslant 0$ 即 $-2\leqslant x\leqslant 3$ 时等号成立，

所以 $f(x)\geqslant mx+5$．

又 $x\in[-2,3]$ 时，$mx+5\geqslant -2m+5\geqslant 3$， ……………………………………………………9 分

所以 $f(x)\geqslant 3$． ……………………………………………………………………………………10 分

解法二：（1）同解法一； ……………………………………………………………………………5 分

（2）$f(x)=|x+2|+|x-3|+mx=\begin{cases}(2+m)x-1, x\geqslant 3,\\ mx+5, -2\leqslant x<3,\\ (m-2)x+1, x<-2,\end{cases}$ ………………………………7 分

当 $x\geqslant 3$ 时，$(m+2)x-1\geqslant 3m+5$；

当 $-2\leqslant x<3$ 时，$mx+5\geqslant -2m+5$；

当 $x<-2$ 时，$(m-2)x+1>-2m+5$，

由上，可得 $f(x)\geqslant -2m+5$， ……………………………………………………………………9 分

又 $m\in(0,1]$，所以 $-2m+5\geqslant -2+5=3$，

故 $f(x)\geqslant 3$． ……………………………………………………………………………………10 分