2016-2017学年福建省漳州市长泰一中高三（上）期中数学试卷（文科）

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1．若a＜b＜0，则下列不等式成立的是（　　）

A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　B．ab＜1　C．$\frac{a}{b}<1$　D．$\frac{a}{b}>1$

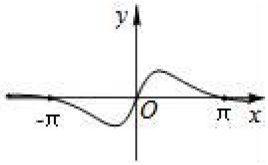
2．函数$y=\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$的定义域为（　　）

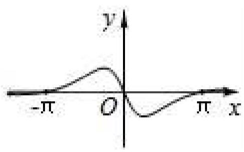
A．（﹣4，﹣1）　B．（﹣4，1）　C．（﹣1，1）　D．（﹣1，1]

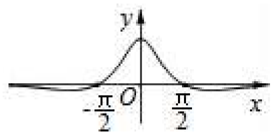
3．若幂函数f（x）=（m^2﹣m﹣1）x^m在（0，+∞）上为增函数，则实数m=（　　）

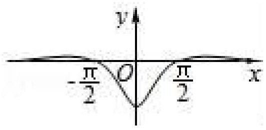
A．2　B．﹣1 C．3　D．﹣1或2

4．函数f（x）=$\frac{\sin x}{x^2+1}$的图象大致为（　　）

A．

B．

C　．

D．

5．将函数y=sin（2x﹣$\frac{\pi}{6}$）图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位，所得函数图象的一条对称轴的方程是（　　）

A．$x=\frac{\pi}{3}$　B．$x=\frac{\pi}{6}$　C．$x=\frac{\pi}{12}$　D．x﹣=$\frac{\pi}{12}$

6．棱长为a的正方体中，连接相邻面的中心，以这些线段为棱的八面体的体积为（　　）

A．$\frac{a^3}{3}$ B．$\frac{a^3}{4}$ C．$\frac{a^3}{6}$ D．$\frac{a^3}{12}$

7．已知平行四边形三个顶点的坐标分别为（﹣1，0），（3，0），（1，﹣5），则第四个点的坐标为（　　）

A．（1，5）或（5，﹣5）　B．（1，5）或（﹣3，﹣5）

C．（5，﹣5）或（﹣3，﹣5）　D．（1，5）或（﹣3，﹣5）或（5，﹣5）

8．在各项都为正数的等差数列$\{a_n\}$中，若$a_1+a_2+\ldots+a_{10}=30$，则$a_5\bullet a_6$的最大值等于（　　）

A．3　B．6　C．9　D．36

9．设l，m，n表示三条直线，α，β，γ表示三个平面，给出下列四个命题：

①若l⊥α，m⊥α，则l∥m；

②若m⊂β，n是l在β内的射影，m⊥l，则m⊥n；

③若m⊂α，m∥n，则n∥α；

④若α⊥γ，β⊥γ，则α∥β．其中真命题为（　　）

A．①②　B．①②③　C．②③④　D．①③④

10．已知曲线$y=x^2+2x-2$在点M处的切线与x轴平行，则点M的坐标是（　　）

A．（﹣1，3）　B．（﹣1，﹣3）　C．（﹣2，﹣3）　D．（﹣2，3）

11．等差数列$\{a_n\}$中，a_1，a_{4025}是函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+6x-1$的极值点，则$\log_2 a_{2013}$等于（　　）

A．2　B．3　C．4　D．5

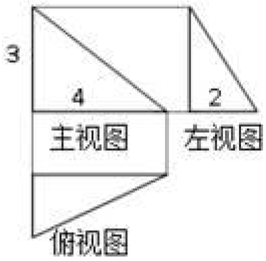
12．定义在R上的函数f（x）满足下列三个条件：（1）$f(x+3)=-\frac{1}{f(x)}$；（2）对任意$3\leqslant x_1<x_2\leqslant 6$，都有$f(x_1)<f(x_2)$；（3）y=f（x+3）的图象关于y轴对称．则下列结论中正确的是（　　）

A．f（3）＜f（7）＜f（4.5）　B．f（3）＜f（4.5）＜f（7）　C．f(7)＜f(4.5)＜f（3）　D．f（7）＜f（3）＜f（4.5）

二．填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分．）

13．若变量x，y满足约束条件$\begin{cases}x-y-2\leqslant 0\\ x+y-2\geqslant 0\\ x-2y\geqslant 0\end{cases}$，则z=2x﹣y的最大值等于____．

14．如图，一个几何体的三视图是三个直角三角形，则该几何体的外接球的表面积为____．



15．如图，自然数列按正三角形图顺序排列，如数 9 排在第 4 行第 3 个位置；设数 2015 排在第 m 行第 n 个位置，则 m+n=____.

1
2　3
4　5　6
7　8　9　10
…………

16．下列命题中，错误命题的序号有____.

（1）“a=﹣1”是“函数 f（x）$=x^2+|x+a+1|$（x∈R）为偶函数”的必要条件；

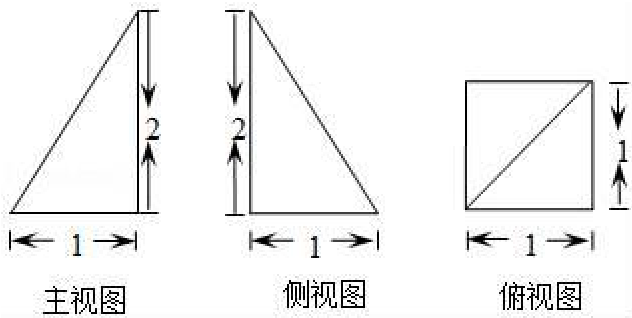
（2）“直线 l 垂直平面α内无数条直线”是“直线 l 垂直平面α”的充分条件；

（3）若 xy=0，则$|x|+|y|=0$；

（4）若 p：∃x∈R，$x^2+2x+2\leqslant 0$，则¬p：∀x∈R，$x^2+2x+2>0$.

三、解答题（共 75 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．已知四棱锥 P﹣ABCD 的三视图如图，则四棱锥 P﹣ABCD 的表面积和体积.



18．已知向量$\vec{m}=(2\cos\frac{x}{2},1)$，$\vec{n}=(\sin\frac{x}{2},1)$（x∈R），设函数$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}-1$.

（1）求函数 f（x）的值域；

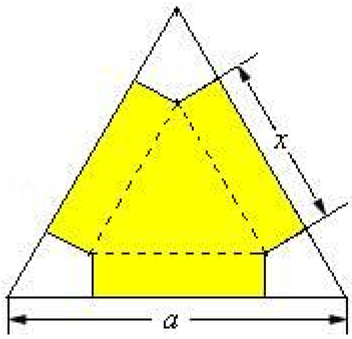
（2）已知锐角△ABC 的三个内角分别为 A，B，C，若$f(A)=\frac{5}{13}$，$f(B)=\frac{3}{5}$，求 f（C）的值.

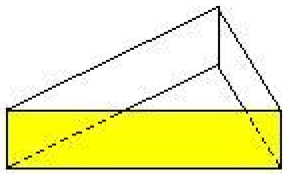
19．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，若$S_n=2a_n+n$，且$b_n=\frac{a_n-1}{a_na_{n+1}}$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

20．在边长为 a 的正三角形铁皮的三个角切去三个全等的四边形，再把它的边沿虚线折起（如图），做成一个无盖的正三角形底铁皮箱，当箱底边长为多少时，箱子容积最大？最大容积是多少？





21．设函数 f（x）=lnx﹣$\frac{1}{2}ax^2$﹣bx

（1）当 a=b=$\frac{1}{2}$时，求函数 f（x）的单调区间；

（2）令 F（x）=f（x）+$\frac{1}{2}ax^2+bx+\frac{a}{x}$（0＜x≤3），其图象上任意一点 P（$x_0$，$y_0$）处切线的斜率 k≤$\frac{1}{2}$恒成立，求实数 a 的取值范围.

（3）当 a=0，b=﹣1 时，方程 f（x）=mx 在区间[1，e^2]内有两个不相等的实数解，求实数 m 的取值范围.

22．在直角坐标系 xOy 中，以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系．已知曲线 C_1：$\begin{cases}x=-4+\cos t\\y=3+\sin t\end{cases}$（t 为参数），$C_2$：$\begin{cases}x=8\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$（θ为参数）.

（Ⅰ）化 C_1，C_2 的方程为普通方程，并说明它们分别表示什么曲线；

（Ⅱ）若 C_1 上的点 P 对应的参数为 t=$\frac{\pi}{2}$，Q 为 C_2 上的动点，求 PQ 中点 M 到直线 C_3：ρ（cosθ﹣2sinθ）=7 距离的最小值.

23．已知函数 f（x）=|x﹣a|+|2x﹣1|（a∈R）.

（Ⅰ）当 a=1 时，求 f（x）≤2 的解集；

（Ⅱ）若 f（x）≤|2x+1|的解集包含集合[$\frac{1}{2}$，1]，求实数 a 的取值范围.

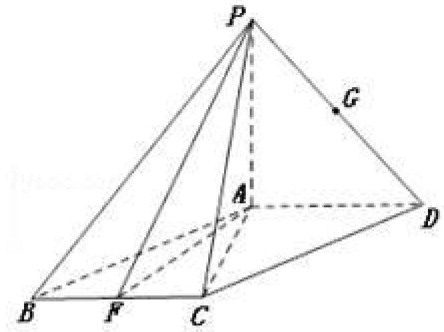
附加题（不计入总分）

24．如图四棱锥 P﹣ABCD 中，底面 ABCD 是平行四边形，∠ACB=90°，PA⊥平面 ABCD，PA=BC=1，AB=$\sqrt{2}$，F 是 BC 的中点．

（Ⅰ）求证：DA⊥平面 PAC

（Ⅱ）PD 的中点为 G，求证：CG∥平面 PAF

（Ⅲ）求三棱锥 A﹣CDG 的体积．



2016-2017学年福建省漳州市长泰一中高三（上）期中数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1．若a＜b＜0，则下列不等式成立的是（　　）

A．$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　B．ab＜1　C．$\frac{a}{b}<1$　D．$\frac{a}{b}>1$

【考点】不等关系与不等式.

【分析】不妨令a=﹣2，b=﹣1，检验可得A、B、C 不正确，利用不等式的基本性质可得D正确.

【解答】解：不妨令a=﹣2，b=﹣1，

∴$\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{b}=-1$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故A不正确.

∴ab=2，故B不正确.

∴$\frac{a}{b}=2$，故C不正确.

由a＜b＜0可得﹣a＞﹣b＞0，$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}>1$，故D正确.

故选D.

2．函数$y=\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$的定义域为（　　）

A．（﹣4，﹣1）　B．（﹣4，1）　C．（﹣1，1）　D．（﹣1，1]

【考点】对数函数的定义域；函数的定义域及其求法.

【分析】由题意知$\begin{cases}x+1>0\\-x^2-3x+4>0\end{cases}$，解得﹣1＜x＜1，由此能求出函数$y=\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$的定义域.

【解答】解：由题意知，函数$y=\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$的定义域为

$$\begin{cases}x+1>0\\-x^2-3x+4>0\end{cases},$$

解得﹣1<x<1，

故选 C.

3．若幂函数 f（x）=（m^2﹣m﹣1）x^m在（0，+∞）上为增函数，则实数 m=（　　）

A．2　B．﹣1 C．3　D．﹣1 或 2

【考点】幂函数的单调性、奇偶性及其应用．

【分析】直接利用幂函数的定义与性质求解即可．

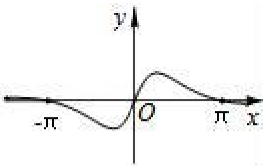
【解答】解：幂函数 f（x）=（m^2﹣m﹣1）x^m在（0，+∞）上为增函数，

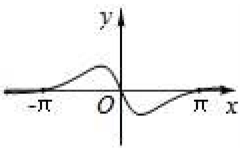
所以 m^2﹣m﹣1=1，并且 m>0，

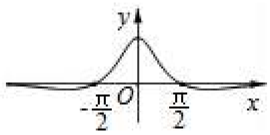
解得 m=2．

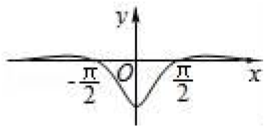
故选：A．

4．函数 f（x）=$\frac{\sin x}{x^2+1}$的图象大致为（　　）

A．

B．

C　．

D．

【考点】函数的图象．

【分析】先研究函数的性质，可以发现它是一个奇函数，再研究函数在原点附近的函数值的符号，从而即可得出正确选项．

【解答】解：此函数是一个奇函数，故可排除 C，D 两个选项；

又当自变量从原点左侧趋近于原点时，函数值为负，图象在 X 轴下方，

当自变量从原点右侧趋近于原点时，函数值为正，图象在 x 轴上方，故可排除 B，

A 选项符合，

故选 A.

5．将函数 y=sin（2x﹣$\frac{\pi}{6}$）图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位，所得函数图象的一条对称轴的方程是（　　）

A．$x=\frac{\pi}{3}$　B．$x=\frac{\pi}{6}$　C．$x=\frac{\pi}{12}$　D．$x-=\frac{\pi}{12}$

【考点】函数 y=Asin（ωx+φ）的图象变换.

【分析】由条件利用 y=Asin（ωx+φ）的图象变换规律，正弦函数的图象的对称性，得出结论.

【解答】解：将函数 y=sin（2x﹣$\frac{\pi}{6}$）图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位，

所得函数图象对应的函数的解析式为 y=sin[2（x+$\frac{\pi}{4}$）﹣$\frac{\pi}{6}$]=sin（2x+$\frac{\pi}{3}$），

当 $x=\frac{\pi}{12}$时，函数取得最大值，可得所得函数图象的一条对称轴的方程是 $x=\frac{\pi}{12}$，

故选：C.

6．棱长为 a 的正方体中，连接相邻面的中心，以这些线段为棱的八面体的体积为（　　）

A．$\frac{a^3}{3}$ B．$\frac{a^3}{4}$ C．$\frac{a^3}{6}$ D．$\frac{a^3}{12}$

【考点】棱柱、棱锥、棱台的体积.

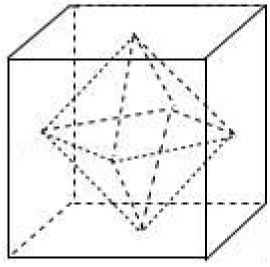
【分析】画出图形，根据题意求出八面体的中间平面面积，然后求出其体积.

【解答】解：画出图就可以了，这个八面体是有两个四棱锥底面合在一起组成的.

一个四棱锥的底面面积是正方体的一个面的一半，就是$\frac{1}{2}a^2$，高为$\frac{1}{2}a$，

所以八面体的体积为：$2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\times\frac{1}{2}a=\frac{a^3}{6}$.

故选 C.



7．已知平行四边形三个顶点的坐标分别为（﹣1，0），（3，0），（1，﹣5），则第四个点的坐标为（　　）

A．（1，5）或（5，﹣5）　B．（1，5）或（﹣3，﹣5）

C．（5，﹣5）或（﹣3，﹣5）　D．（1，5）或（﹣3，﹣5）或（5，﹣5）

【考点】平面向量共线（平行）的坐标表示．

【分析】利用平行四边形的对角线相交且被交点平方；通过对与哪一个点是对顶点分类讨论；利用中点坐标公式求出．

【解答】解：设第四个顶点为（x，y）

当第四个顶点与（﹣1，0）对顶点则

$x-1=4$；$y=-5$

解得 $x=5$，$y=-5$

当第四个顶点与（3，0）为对顶点则

$x+3=0$，$y=-5$

解得 $x=-3$，$y=-5$

当第四个顶点与（1，﹣5）为对顶点则

$x+1=2$；$y-5=0$

解得 $x=1$，$y=5$

故选 D

8．在各项都为正数的等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1+a_2+\ldots+a_{10}=30$，则 $a_5\bullet a_6$ 的最大值等于（　　）

A．3　B．6　C．9　D．36

【考点】等差数列的性质．

【分析】利用 $a_1+a_2+\ldots+a_{10}=30$，求出 $a_5+a_6=6$，再利用基本不等式，求出 $a_5\bullet a_6$ 的

最大值．

【解答】解：由题设，$a_1+a_2+a_3+…+a_{10}=5（a_1+a_{10}）=5（a_5+a_6）=30$

所以 $a_5+a_6=6$，

又因为等差数列$\{a_n\}$各项都为正数，所以 $a_5a_6\leqslant(\frac{a_5+a_6}{2})^2=9$，

当且仅当 $a_5=a_6=3$ 时等号成立，

所以 $a_5•a_6$ 的最大值等于 9，

故选 C.

9．设 l，m，n 表示三条直线，α，β，γ表示三个平面，给出下列四个命题：

①若 l⊥α，m⊥α，则 l∥m；

②若 m⊂β，n 是 l 在β内的射影，m⊥l，则 m⊥n；

③若 m⊂α，m∥n，则 n∥α；

④若α⊥γ，β⊥γ，则α∥β．其中真命题为（　　）

A．①②　B．①②③　C．②③④　D．①③④

【考点】平面的基本性质及推论．

【分析】选项①结论是根据直线与平面垂直的性质定理得出的故其正确，选项②根据由三垂线定理的逆定理可证，选项③n 也可能在平面α内时不正确，选项④举反例，如正方体共顶点的三个平面．

【解答】解：选项①，可以根据直线与平面垂直的性质定理得出的，故其正确；

选项②，根据由三垂线定理的逆定理可证可知正确；

选项③，n 在平面α内时不正确；

选项④，若α⊥β，α⊥γ，则γ⊥β，不正确，如正方体共顶点的三个平面；

故选 A.

10．已知曲线 $y=x^2+2x-2$ 在点 M 处的切线与 x 轴平行，则点 M 的坐标是（　　）

A．（﹣1，3）　B．（﹣1，﹣3）　C．（﹣2，﹣3）　D．（﹣2，3）

【考点】利用导数研究曲线上某点切线方程．

【分析】设出 M（m，n），求出导数，求得切线的斜率，由题意可得 2m+2=0，解得 m，进而得到 n，即可得到切点坐标．

【解答】解：$y=x^2+2x-2$ 的导数为 $y'=2x+2$，

设 M（m，n），则在点 M 处的切线斜率为 $2m+2$，

由于在点 M 处的切线与 x 轴平行，

则 $2m+2=0$，解得 $m=-1$，

$n=1-2-2=-3$，

即有 M（－1，－3）.

故选 B.

11. 等差数列$\{a_n\}$中，a_1，a_{4025}是函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+6x-1$的极值点，则 $\log_2 a_{2013}$ 等于（　　）

A．2　B．3　C．4　D．5

【考点】等差数列的通项公式；利用导数研究函数的极值.

【分析】求出原函数的导函数，由导函数为 0 求得 $a_1+a_{4025}=8$，结合等差数列的性质求得 a_{2013}，代入 $\log_2 a_{2013}$ 得答案.

【解答】解：由$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+6x-1$，得 $f'(x)=x^2-8x+6$.

由 $f'(x)=x^2-8x+6=0$，得 $x_1+x_2=8$，

又 a_1，a_{4025} 是函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x^2+6x-1$的极值点，

∴$a_1+a_{4025}=8$，

则 $a_{2013}=\frac{a_1+a_{4025}}{2}=\frac{8}{2}=4$，

∴$\log_2 a_{2013}=\log_2 4=2$.

故选：A.

12. 定义在 R 上的函数 f（x）满足下列三个条件：（1）$f(x+3)=-\frac{1}{f(x)}$；（2）对任意 $3\leqslant x_1<x_2\leqslant 6$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$；（3）$y=f(x+3)$ 的图象关于 y 轴对称．则下列结论中正确的是（　　）

A．f（3）＜f（7）＜f（4.5）　B．f（3）＜f（4.5）＜f（7）　C. f(7)＜f(4.5)＜f（3）　D．f（7）＜f（3）＜f（4.5）

【考点】抽象函数及其应用.

【分析】由（1）可得函数的周期为6，由（2）可得函数单调递增，结合（3）可得函数的对称性，根据函数性质之间的关系即可得到结论.

【解答】解：∵$f(x+3)=-\frac{1}{f(x)}$；

∴$f(x+6)=-\frac{1}{f(x+3)}=f(x)$，即函数的周期是6，

∵对任意 $3\leqslant x_1<x_2\leqslant 6$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$；

∴函数在[3，6]上单调递增，

∵$y=f(x+3)$ 的图象关于 y 轴对称，

即函数 f（x）关于 x=3 对称，

则 f（7）=f（1）=f（5），

∵3<4.5<5，

∴f（3）<f（4.5）<f（5），

即 f（3）<f（4.5）<f（7），

故选：B

二．填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13．若变量 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-y-2\leqslant 0\\ x+y-2\geqslant 0\\ x-2y\geqslant 0\end{cases}$，则 z=2x－y 的最大值等于__6__.

【考点】简单线性规划.

【分析】作出满足不等式组的可行域，由 z=2x﹣y 可得 y=2x﹣Z 可得﹣z 为该直线在 y 轴上的截距，截距越大，z 越小，结合图形可求 z 的最大值

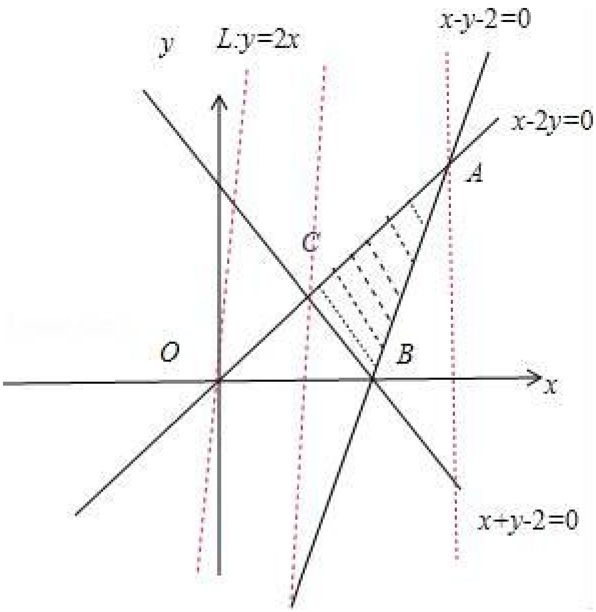
【解答】解：作出不等式组所表示的平面区域，如图所示

由于 z=2x﹣y 可得 y=2x﹣z，则﹣z 表示目标函数在 y 轴上的截距，截距越大，z 越小

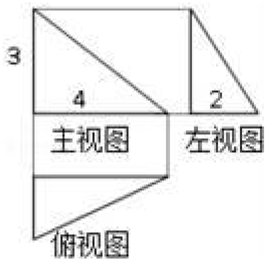
作直线 L：y=2x，然后把直线 l 向平域平移，由题意可得，直线平移到 A 时，z 最大

由$\begin{cases}x-y-2=0\\ x-2y=0\end{cases}$可得 C（4，2），此时 z=6

故答案为 6



14．如图，一个几何体的三视图是三个直角三角形，则该几何体的外接球的表面积为__29π__．



【考点】由三视图求面积、体积．

【分析】几何体复原为底面是直角三角形，一条侧棱垂直底面直角顶点的三棱锥，扩展为长方体，长方体的对角线的长，就是外接球的直径，然后求其的表面积．

【解答】解：由三视图复原几何体，几何体是底面是直角三角形，

一条侧棱垂直底面直角顶点的三棱锥；扩展为长方体，

其外接与球，它的对角线的长为球的直径，

得长方体的体对角线的长为$\sqrt{3^2+4^2+2^2}=\sqrt{29}$，

∴长方体的外接球的半径为$\frac{\sqrt{29}}{2}$，

∴球的表面积为4π（$\frac{\sqrt{29}}{2}$）^{2}=29π，

故答案为：29π

15．如图，自然数列按正三角形图顺序排列，如数 9 排在第 4 行第 3 个位置；设数 2015 排在第 m 行第 n 个位置，则 m+n=___125___．

1

2 3

4 5 6

7 8 9 10

…………

【考点】归纳推理．

【分析】本题根据图形排列的规律，发现每一行的最后一个数是正整数数列的前 n 项和，从而可以求出第 m－1 行的最后一个数，从而算出 m 的值，然后推导出第 m 行的第 n 个数的表达式，从而求出 n 的值，得到 m+n 的值，得到本题结论．

【解答】解：∵如图，自然数列按正三角形图顺序排列，

∴第 1 行最后一个为：1，

第 2 行最后一个为：1+2=3，

第 3 行最后一个为：1+2+3，

第 4 行最后一个为：1+2+3+4，

…

第 m－1 行最后一个数为：1+2+3+…+（m－1）$=\frac{1+(m-1)}{2}\times(m-1)=\frac{m(m-1)}{2}$．

∵数 2015 排在第 m 行第 n 个位置，

∴$\frac{m(m-1)}{2}<2015\leqslant\frac{m(m+1)}{2}$，$m\in N^*$，

且$2015=\frac{m(m-1)}{2}+n$，

∴m=63，n=62．

∴m+n=125．

故答案为：125．

16．下列命题中，错误命题的序号有___（2）（3）___．

（1）“a=－1”是“函数 f（x）=$x^2+|x+a+1|$（x∈R）为偶函数”的必要条件；

（2）“直线 l 垂直平面α内无数条直线”是“直线 l 垂直平面α”的充分条件；

（3）若 xy=0，则|x|+|y|=0；

（4）若 p：∃x∈R，$x^2+2x+2\leqslant 0$，则¬p：∀x∈R，$x^2+2x+2>0$．

【考点】命题的真假判断与应用.

【分析】（1）根据充分条件和必要条件的定义进行判断.

（2）根据线面垂直的定义进行判断.

（3）根据绝对值的性质进行判断.

（4）根据含有量词的命题的否定进行判断.

【解答】解：（1）若"函数 $f(x)=x^2+|x+a+1|$（$x\in R$）为偶函数"，

则 $f(-x)=f(x)$，

即 $x^2+|x+a+1|=x^2+|-x+a+1|$，

则 $|x+a+1|=|x-(a+1)|$，

平方得 $x^2+2(a+1)x+(a+1)^2=x^2-2(a+1)x+(a+1)^2$，

即 $2(a+1)x=-2(a+1)x$，

则 $4(a+1)=0$，即 $a=-1$，

则"$a=-1$"是"函数 $f(x)=x^2+|x+a+1|$（$x\in R$）为偶函数"的必要条件；正确；

（2）"直线 l 垂直平面α内无数条直线"则"直线 l 垂直平面α"不一定成立，故（2）错误；

（3）当 $x=0$，$y=1$ 时，满足 $xy=0$，但 $|x|+|y|=0$ 不成立，故（3）错误；

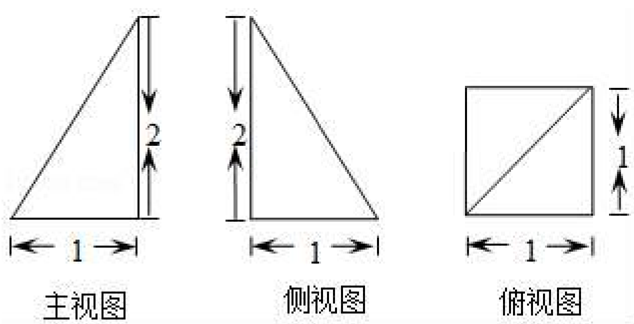
（4）若 p：$\exists x\in R$，$x^2+2x+2\leqslant 0$，则¬p：$\forall x\in R$，$x^2+2x+2>0$ 正确.

故错误的是（2）（3），

故答案为：（2）（3）

三、解答题（共 75 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．已知四棱锥 P－ABCD 的三视图如图，则四棱锥 P－ABCD 的表面积和体积.



【考点】由三视图求面积、体积.

【分析】由三视图可知，几何体为四棱锥，底面为正方形，且一边垂直于底面，

再求解即可．

【解答】解：由题意知，图形为直四棱锥，

则表面积为$2\times\frac{1}{2}\times2\times1+2\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{1+4}+1=3+\sqrt{5}$，

体积为 $V=\frac{1}{3}\times1\times2=\frac{2}{3}$．

18．已知向量$\vec{m}=(2\cos\frac{x}{2}，1)$，$\vec{n}=(\sin\frac{x}{2}，1)$（x∈R），设函数$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}-1$．

（1）求函数 f（x）的值域；

（2）已知锐角△ABC 的三个内角分别为 A，B，C，若$f(A)=\frac{5}{13}$，$f(B)=\frac{3}{5}$，求 f（C）的值．

【考点】平面向量数量积的运算；同角三角函数基本关系的运用；两角和与差的正弦函数；正弦函数的定义域和值域．

【分析】（1）根据所给的两个向量的坐标，写出函数 f（x）的解析式，逆用正弦的二倍角公式，把函数变形为 y=sinx 的形式，根据所给的变量的取值范围，写出函数的值域．

（2）根据$f(A)=\frac{5}{13}$，$f(B)=\frac{3}{5}$，写出三角形的两个内角的三角函数值，根据三角形是锐角三角形和同角的三角函数关系，根据两角和的正弦公式，得到结果．

【解答】解：（1）∵向量$\vec{m}=(2\cos\frac{x}{2}，1)$，$\vec{n}=(\sin\frac{x}{2}，1)$（x∈R），

∴$f(x)=\vec{m}\cdot\vec{n}-1=(2\cos\frac{x}{2}，1)\cdot(\sin\frac{x}{2}，1)-1$

$=2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}+1-1=\sin x$.

∵x∈R，

∴函数 f（x）的值域为[﹣1，1]．

（2）∵$f(A)=\frac{5}{13}$，$f(B)=\frac{3}{5}$，∴$\sin A=\frac{5}{13}$，$\sin B=\frac{3}{5}$．

∵A，B 都是锐角，

∴$\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{12}{13}$，$\cos B=\sqrt{1-\sin^2B}=\frac{4}{5}$．

∴f（A+B）=sin（A+B）=sinAcosB+cosAsinB

$=\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}=\frac{56}{65}$．

∴f（A+B）的值为$\frac{56}{65}$.

19．已知数列{a_n}的前 n 项和为 S_n，若 $S_n=2a_n+n$，且 $b_n=\frac{a_n-1}{a_na_{n+1}}$.

（1）求{a_n}的通项公式；

（2）求数列{b_n}的前 n 项和．

【考点】数列递推式；数列的求和．

【分析】(1)利用 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 化简可知 $a_{n+1}=2a_n-1$，变形可知 $a_{n+1}-1=2(a_n-1)$，进而可知数列{a_n-1}是以 - 2 为首项、2 为公比的等比数列，计算即得结论；

（2）通过（1）裂项可知 $b_n=\frac{1}{2^{n+1}-1}-\frac{1}{2^n-1}$，并项相加即得结论．

【解答】解：（1）解：由 $S_n=2a_n+n$ 得：$S_{n+1}=2a_{n+1}+n+1$，

∴$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2a_{n+1}-2a_n+1$，即 $a_{n+1}=2a_n-1$，

∴$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$，

∵$S_1=2a_1+1$，

∴$a_1=-1$，$a_1-1=-2\neq0$，

∴数列{a_n-1}是以 - 2 为首项、2 为公比的等比数列，

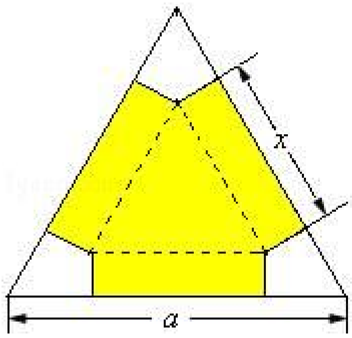
∴$a_n-1=-2^n$，$a_n=1-2^n$；

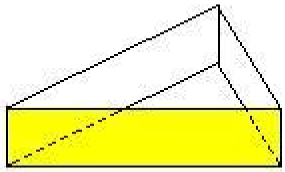
（2）由（1）知 $b_n=\frac{a_n-1}{a_na_{n+1}}=\frac{1-2^n-1}{(1-2^n)(1-2^{n+1})}=\frac{1}{2^{n+1}-1}-\frac{1}{2^n-1}$，

∴$T_n=-[(\frac{1}{2-1}-\frac{1}{2^2-1})+(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1})+\ldots+(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1})]$

$=\frac{1}{2^{n+1}-1}-1$.

20．在边长为 a 的正三角形铁皮的三个角切去三个全等的四边形，再把它的边沿虚线折起（如图），做成一个无盖的正三角形底铁皮箱，当箱底边长为多少时，箱子容积最大？最大容积是多少？





【考点】棱柱、棱锥、棱台的体积.

【分析】设箱底边长为x，根据已知中箱子的制作方法，我们可求出容积V（x）的解析式，求出其导函数，分析其单调性，可得到函数的最值点，代入可得答案.

【解答】解：设箱底边长为x，则箱高为 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{a-x}{2}$（0＜x＜a），…

箱子的容积为 V（x）$=\frac{1}{2}x^2\times\sin60°\times h=\frac{1}{8}ax^2-\frac{1}{8}x^3$（0＜x＜a），.　　　　…

由 V′（x）$=\frac{1}{4}ax-\frac{3}{8}x^2=0$ 解得 x=0（舍），$x=\frac{2}{3}a$，…

且当 x∈（0，$\frac{2}{3}a$）时，V′（x）＞0；当 x∈（$\frac{2}{3}a$，a）时，V′（x）＜0，

所以函数V（x）在 $x=\frac{2}{3}a$ 处取得极大值，…

这个极大值就是函数V（x）的最大值：$V(\frac{2}{3}a)=\frac{1}{8}a(\frac{2}{3}a)^2-\frac{1}{8}(\frac{2}{3}a)^3=\frac{a^3}{54}$.　…

答：当箱子底边长为 $\frac{2}{3}a$ 时，箱子容积最大，最大值为 $\frac{a^3}{54}$.　　　　…

21．设函数 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}ax^2-bx$

（1）当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，求函数f（x）的单调区间；

（2）令 $F(x)=f(x)+\frac{1}{2}ax^2+bx+\frac{a}{x}$（0＜x≤3），其图象上任意一点P（$x_0$，$y_0$）处切线的斜率 $k\leq\frac{1}{2}$ 恒成立，求实数a的取值范围.

（3）当a=0，b=﹣1时，方程f（x）=mx在区间[1，e^2]内有两个不相等的实数解，求实数m的取值范围.

【考点】利用导数研究函数的单调性；利用导数求闭区间上函数的最值；利用导数研究曲线上某点切线方程.

【分析】（1）将 a，b 的值代入，求出函数 f（x）的表达式，导数，从而求出函数的单调区间；

（2）求出 F（x），求导得到$\frac{x_0-a}{x_0^2}$≤$\frac{1}{2}$在（0，3）上恒成立，分离参数求出 a 的范围即可；

（3）得到 m=1+$\frac{\ln x}{x}$，只需 m=1+$\frac{\ln x}{x}$在区间[1，e^2]内恰有两个实数解，令 g（x）=1+$\frac{\ln x}{x}$（x＞0），根据函数的单调性求出 m 的范围即可．

【解答】解：（1）依题意，知 f（x）的定义域为（0，+∞），

当 a=b=$\frac{1}{2}$时，f（x）=lnx﹣$\frac{1}{4}x^2$﹣$\frac{1}{2}$x，

∴f′（x）=$\frac{-(x+2)(x-1)}{2x}$，

令 f′（x）=0，解得：x=1 或 x=﹣2（舍去），经检验，x=1 是方程的根．

当 0＜x＜1 时，f′（x）＞0，当 x＞1 时，f′（x）＜0，

所以 f（x）的单调递增区间是（0，1），单调递减区间是（1，+∞）．

（2）F（x）=lnx+$\frac{a}{x}$，（0＜x＜3），

则有 K=F′（x）=$\frac{x_0-a}{x_0^2}$≤$\frac{1}{2}$在（0，3）上恒成立，

∴a≥（﹣$\frac{1}{2}x_0^2+x_0$）$_{max}$，x_0=1 时，（﹣$\frac{1}{2}x_0^2+x_0$）$_{max}$=$\frac{1}{2}$，

故 a≥$\frac{1}{2}$；

（3）a=0，b=﹣1 时，f（x）=lnx+x，

由 f（x）=mx 得 lnx+x=mx，

又 x＞0，∴m=1+$\frac{\ln x}{x}$，

要使方程 f（x）=mx 在区间[1，e^2]内恰有两个实数解，

只需 m=1+$\frac{\ln x}{x}$在区间[1，e^2]内恰有两个实数解，

令 g（x）=1+$\frac{\ln x}{x}$（x＞0），∴g′（x）=$\frac{1-\ln x}{x^2}$，

令 g′（x）＞0，解得：0＜x＜e，令 g′（x）＜0，解得：x＞e，

∴g（x）在[1，e]递增，在[e，e^2]递减，

g（1）=1，g（e^2）=$1+\frac{2}{e^2}$，g（e）=$1+\frac{1}{e}$，

∴$1+\frac{2}{e^2}\leqslant m<1+\frac{1}{e}$.

22．在直角坐标系 xOy 中，以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴，建立极坐标系．已知曲线 C_1：$\begin{cases}x=-4+\cos t\\ y=3+\sin t\end{cases}$（t 为参数），$C_2$：$\begin{cases}x=8\cos\theta\\ y=3\sin\theta\end{cases}$（θ为参数）．

（Ⅰ）化 C_1，C_2 的方程为普通方程，并说明它们分别表示什么曲线；

（Ⅱ）若 C_1 上的点 P 对应的参数为 $t=\frac{\pi}{2}$，Q 为 C_2 上的动点，求 PQ 中点 M 到直线 C_3：ρ（cosθ－2sinθ）=7 距离的最小值．

【考点】参数方程化成普通方程；简单曲线的极坐标方程．

【分析】（Ⅰ）曲线 C_1：$\begin{cases}x=-4+\cos t\\ y=3+\sin t\end{cases}$（t 为参数），利用 $\sin^2t+\cos^2t=1$ 即可化为普通方程；C_2：$\begin{cases}x=8\cos\theta\\ y=3\sin\theta\end{cases}$（θ为参数），利用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 化为普通方程．

（Ⅱ）当 $t=\frac{\pi}{2}$时，P（－4，4），Q（8cosθ，3sinθ），故 M$\left(-2+\cos\theta,\ 2+\frac{3}{2}\sin\theta\right)$，直线 C_3：ρ（cosθ－2sinθ）=7 化为 x－2y=7，利用点到直线的距离公式与三角函数的单调性即可得出．

【解答】解：（Ⅰ）曲线 C_1：$\begin{cases}x=-4+\cos t\\ y=3+\sin t\end{cases}$（t 为参数），化为 $(x+4)^2+(y-3)^2=1$，

∴C_1 为圆心是（－4，3），半径是 1 的圆．

C_2：$\begin{cases}x=8\cos\theta\\ y=3\sin\theta\end{cases}$（θ为参数），化为$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{9}=1$.

C_2 为中心是坐标原点，焦点在 x 轴上，长半轴长是 8，短半轴长是 3 的椭圆．

（Ⅱ）当 $t=\frac{\pi}{2}$时，P（－4，4），Q（8cosθ，3sinθ），故 M$\left(-2+4\cos\theta,\ 2+\frac{3}{2}\sin\theta\right)$，

直线 C_3：ρ（cosθ－2sinθ）=7 化为 x－2y=7，

M 到 C_3 的距离 $d=\frac{\sqrt{5}}{5}|4\cos\theta-3\sin\theta-13|=\frac{\sqrt{5}}{5}|5\sin(\theta+\phi)+13|$，

从而当 cossinθ=$\frac{4}{5}$，sinθ=－$\frac{3}{5}$时，d 取得最小值$\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

23．已知函数 f（x）=|x－a|+|2x－1|（a∈R）.

（Ⅰ）当 a=1 时，求 f（x）≤2 的解集；

（Ⅱ）若 f（x）≤|2x+1|的解集包含集合[$\frac{1}{2}$，1]，求实数 a 的取值范围.

【考点】绝对值不等式的解法.

【分析】(Ⅰ)运用分段函数求得 f(x)的解析式，由 f(x)≤2，即有$\begin{cases}x\leqslant\frac{1}{2}\\1-x+1-2x\leqslant2\end{cases}$或$\begin{cases}\frac{1}{2}<x<1\\1-x+2x-1\leqslant2\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant1\\x-1+2x-1\leqslant2\end{cases}$，解不等式即可得到所求解集；

（Ⅱ）由题意可得当 $x\in[\frac{1}{2}，1]$时，不等式 f（x）≤|2x+1|恒成立．即有（x－2）$_{max}$≤a≤（x+2）$_{min}$．求得不等式两边的最值，即可得到 a 的范围.

【解答】解：（Ⅰ）当 a=1 时，f（x）=|x－1|+|2x－1|，f（x）≤2⇒|x－1|+|2x－1|≤2，

上述不等式可化为$\begin{cases}x\leqslant\frac{1}{2}\\1-x+1-2x\leqslant2\end{cases}$或$\begin{cases}\frac{1}{2}<x<1\\1-x+2x-1\leqslant2\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant1\\x-1+2x-1\leqslant2\end{cases}$

解得$\begin{cases}x\leqslant\frac{1}{2}\\x\geqslant0\end{cases}$或$\begin{cases}\frac{1}{2}<x<1\\x\leqslant2\end{cases}$或$\begin{cases}x\geqslant1\\x\leqslant\frac{4}{3}\end{cases}$. …

∴$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$或$\frac{1}{2}<x<1$或$1\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$，

∴原不等式的解集为$\{x|0\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}\}$．…

（Ⅱ）∵f（x）≤|2x+1|的解集包含$[\frac{1}{2}，1]$，

∴当 $x\in[\frac{1}{2}，1]$时，不等式 f（x）≤|2x+1|恒成立，…

即|x－a|+|2x－1|≤|2x+1|在 $x\in[\frac{1}{2}，1]$上恒成立，

∴|x－a|+2x－1≤2x+1，

即|x－a|≤2，∴－2≤x－a≤2，

∴x－2≤a≤x+2 在 $x\in[\frac{1}{2}，1]$上恒成立，…

∴ $(x-2)_{max} \leqslant a \leqslant (x+2)_{min}$，∴ $-1 \leqslant a \leqslant \frac{5}{2}$，

所以实数 a 的取值范围是 $[-1, \frac{5}{2}]$. …

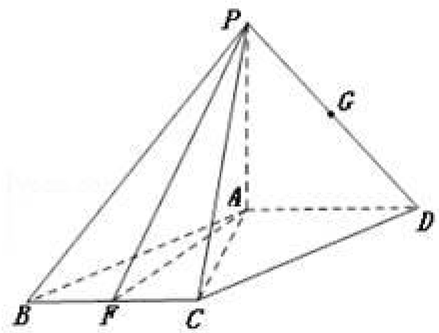
附加题（不计入总分）

24．如图四棱锥 P－ABCD 中，底面 ABCD 是平行四边形，$\angle ACB=90°$，PA⊥平面 ABCD，PA=BC=1，AB=$\sqrt{2}$，F 是 BC 的中点.

（Ⅰ）求证：DA⊥平面 PAC

（Ⅱ）PD 的中点为 G，求证：CG∥平面 PAF

（Ⅲ）求三棱锥 A－CDG 的体积.



【考点】棱柱、棱锥、棱台的体积；直线与平面垂直的判定.

【分析】（Ⅰ）推导出 $\angle ACB=\angle DAC=90°$，PA⊥DA，AC⊥DA，由此能证明 DA⊥平面 PAC.

（Ⅱ）PD 的中点为 G，在平面 PAD 内作 GH⊥PA 于 H，连接 FH，则四边形 FCGH 为平行四边形，由此能证明 CG∥平面 PAF.

（Ⅲ）由 $V_{A-CDG}=V_{G-ACD}$，能求出三棱锥 A－CDG 的体积.

【解答】证明：（Ⅰ）四边形是平行四边形，∴$\angle ACB=\angle DAC=90°$，

∵PA⊥平面 ABCD，∴PA⊥DA，又 AC⊥DA，AC∩PA=A，

∴DA⊥平面 PAC. …

（Ⅱ）PD 的中点为 G，在平面 PAD 内作 GH⊥PA 于 H，

则 GH 平行且等于$\frac{1}{2}$AD，连接 FH，则四边形 FCGH 为平行四边形，…

∴GC∥FH，

∵FH⊂平面 PAE，CG⊄平面 PAE，

∴CG∥平面 PAF． …

解：（III）设 S 为 AD 的中点，连结 GS，则 GS 平行且等于$\frac{1}{2}$PA=$\frac{1}{2}$，

∵PA⊥平面 ABCD，∴GS⊥平面 ABCD，

∴三棱锥 A﹣CDG 的体积 $V_{A-CDG}=V_{G-ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot GS=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AC\times AD\times GS=\frac{1}{12}$．…