厦门市集美中学 2022—2023 学年度第一学期第三次月考高二数学

满分：150 分

一、单项选择题（本题共 8 道小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知空间向量 $\vec{a}=(m+1,m,-2)$，$\vec{b}=(-2,1,4)$，且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 m 的值为（　　）

A. $-\frac{10}{3}$　　B. -10　　C. 10　　D. $\frac{10}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据向量垂直得 $-2(m+1)+m-8=0$，即可求出 m 的值．

【详解】$\because \vec{a}\perp\vec{b},\therefore -2(m+1)+m-8=0\Rightarrow m=-10$.

故选：B.

2. 直线 $l:x+\sqrt{3}y-3=0$ 的倾斜角 α 为（　　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】D

【解析】

【分析】由直线的方程，求得直线的斜率，进而根据 $k=\tan\alpha$，即可得倾斜角，得到答案．

【详解】由题意，直线 $l:x+\sqrt{3}y-3=0$，可得直线的斜率 $k=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

即 $\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，又 $\because \alpha\in[0,\pi)$，所以 $\alpha=\frac{5\pi}{6}$，

故选 D．

【点睛】本题考查直线的倾斜角的求解，其中解答中由直线方程得出斜率，再根据斜率与倾斜角的关键求解是解决的关键，着重考查了运算与求解能力，属于属基础题．

3. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率是 2，则其渐近线方程为（　　）

A. $\sqrt{3}x\pm y=0$　　B. $x\pm\sqrt{3}y=0$　　C. $2x\pm y=0$　　D. $x\pm 2y=0$

【答案】A

【解析】

【分析】

利用离心率求得 $\frac{b}{a}$，由此求得渐近线方程.

【详解】依题意 $\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=2, \frac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，即 $\sqrt{3}x\pm y=0$.

故选：A

【点睛】本小题主要考查双曲线渐近线方程的求法，属于基础题.

4. 两平行直线 $3x-2y-1=0$ 和 $6x-4y+3=0$ 间的距离是（　　）

A. $\frac{5\sqrt{13}}{26}$　　B. $\frac{4\sqrt{13}}{13}$　　C. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$　　D. $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

【答案】A

【解析】

【分析】将方程变形，再根据两平行直线间的距离公式计算可得；

【详解】解：直线 $3x-2y-1=0$ 即为 $6x-4y-2=0$，所以两平行直线 $6x-4y-2=0$ 和 $6x-4y+3=0$ 间的距离 $d=\frac{|-2-3|}{\sqrt{6^2+(-4)^2}}=\frac{5\sqrt{13}}{26}$；

故选：A

5. 过点 $A(3,1)$ 的圆 C 与直线 $x-y=0$ 相切于点 $B(1,1)$，则圆 C 的方程为（　　）

A. $(x-2)^2+y^2=2$　　B. $(x-2)^2+(y-1)^2=1$

C. $(x-3)^2+(y-4)^2=9$　　D. $(x-3)^2+(y+1)^2=8$

【答案】A

【解析】

【分析】求得圆心和半径，由此求得圆的方程.

【详解】设圆心为 (a,b)，半径为 r，

则 $\begin{cases}(a-3)^2+(b-1)^2=(a-1)^2+(b-1)^2\\ \frac{b-1}{a-1}=-1\end{cases}$，

解得 $a=2,b=0$，所以圆心为 $(2,0)$，

半径 $r=\sqrt{(a-1)^2+(b-1)^2}=\sqrt{(2-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{2}$.

所以圆 C 的方程为 $(x-2)^2+y^2=2$.

故选：A

6. 已知点 P 是抛物线 $x^2=4y$ 上的动点，点 P 在 x 轴上的射影是点 Q，点 A 的坐标是 $(8,7)$，则 $|PA|+|PQ|$ 的最小值为（　　）

A. 7　　　　B. 8　　　　C. 9　　　　D. 10

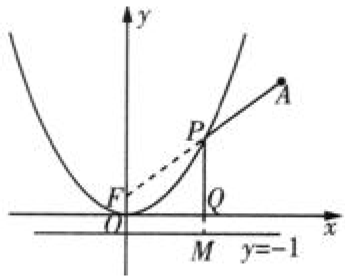
【答案】C

【解析】

【分析】设抛物线的焦点为 $F(0,1)$，根据抛物线的定义可知，$|PA|+|PQ|=|PA|+|PF|-1$，再根据两点之间线段最短，即可解出.

【详解】易知抛物线的焦点为 $F(0,1)$，准线方程为 $y=-1$.连接 PF，延长 PQ 交准线于点 M，如图所示.

根据抛物线的定义，知 $|PF|=|PM|=|PQ|+1$.



所以 $|PA|+|PQ|=|PA|+|PF|-1\geq|AF|-1=\sqrt{8^2+(7-1)^2}-1=9$，当且仅当 A，$P$，$F$ 三点共线时，等号成立，所以 $|PA|+|PQ|$ 的最小值为 9.

故选：C.

7. 若直线 $l:mx+ny=4$ 和圆 $O:x^2+y^2=4$ 没有交点，则过点 $P(m,n)$ 的直线与椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的交点个数为（　　）

A. 0 个　　　　B. 至多有一个　　　　C. 1 个　　　　D. 2 个

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意得到 $m^2+n^2<4$，求得点 $P(m,n)$ 是以原点为圆心，2 为半径的圆及其内部的点，根据圆 $m^2+n^2=4$ 内切于椭圆，得到点 $P(m,n)$ 是椭圆内的点，即可求解.

【详解】因为直线 $l:mx+ny=4$ 和圆 $O:x^2+y^2=4$ 没有交点，

可得 $\dfrac{|0+0+4|}{\sqrt{m^2+n^2}}>2$，即 $m^2+n^2<4$，

所以点 $P(m,n)$ 是以原点为圆心，2 为半径的圆及其内部的点，

又因为椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，可得 $a=3,b=2$，

所以圆 $m^2+n^2=4$ 内切于椭圆，即点 $P(m,n)$ 是椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 内的点，

所以点 $P(m,n)$ 的一条直线与椭圆的公共点的个数为 2.

故选：D.

8. 已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 F_2 的直线与 C 交于 A，B 两点.若 $|AF_2|=2|F_2B|$，$|AB|=|BF_1|$，则 C 的方程为

A. $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$　　B. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$　　C. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

【答案】B

【解析】

【分析】由已知可设 $|F_2B|=n$，则 $|AF_2|=2n,|BF_1|=|AB|=3n$，得 $|AF_1|=2n$，在 $\triangle AF_1B$ 中求得 $\cos\angle F_1AB=\dfrac{1}{3}$，再在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，从而可求解.

【详解】法一：如图，由已知可设 $|F_2B|=n$，则 $|AF_2|=2n,|BF_1|=|AB|=3n$，由椭圆的定义有 $2a=|BF_1|+|BF_2|=4n$，$\therefore|AF_1|=2a-|AF_2|=2n$. 在 $\triangle AF_1B$ 中，由余弦定理推论得 $\cos\angle F_1AB=\dfrac{4n^2+9n^2-9n^2}{2\cdot2n\cdot3n}=\dfrac{1}{3}$. 在 $\triangle AF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $4n^2+4n^2-2\cdot2n\cdot2n\cdot\dfrac{1}{3}=4$，解得 $n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

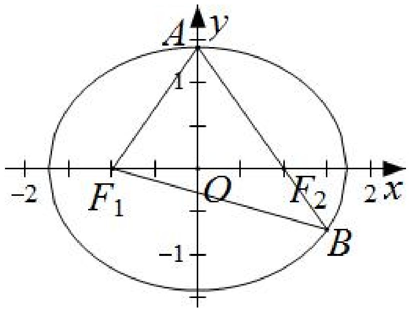
$\therefore 2a=4n=2\sqrt{3}$，$\therefore a=\sqrt{3}$，$\therefore b^2=a^2-c^2=3-1=2$，$\therefore$ 所求椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$，故选 B.

法二：由已知可设 $|F_2B|=n$，则 $|AF_2|=2n,|BF_1|=|AB|=3n$，由椭圆的定义有 $2a=|BF_1|+|BF_2|=4n$，$\therefore|AF_1|=2a-|AF_2|=2n$. 在 $\triangle AF_1F_2$ 和 $\triangle BF_1F_2$ 中，由余弦定理得

$\begin{cases}4n^2+4-2\cdot2n\cdot2\cdot\cos\angle AF_2F_1=4n^2\\n^2+4-2\cdot n\cdot2\cdot\cos\angle BF_2F_1=9n^2\end{cases}$，又 $\angle AF_2F_1$，$\angle BF_2F_1$ 互补，$\therefore\cos\angle AF_2F_1+\cos\angle BF_2F_1=0$，

两式消去$\cos\angle AF_2F_1$,$\cos\angle BF_2F_1$，得$3n^2+6=11n^2$，解得

$n=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\therefore 2a=4n=2\sqrt{3}$, $\therefore a=\sqrt{3}$, $\therefore b^2=a^2-c^2=3-1=2$, $\therefore$ 所求椭圆方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，故选 B.



【点睛】本题考查椭圆标准方程及其简单性质，考查数形结合思想、转化与化归的能力，很好的落实了直观想象、逻辑推理等数学素养.

二、多项选择题（本题共 4 道小题，每小题 5 分，共 20 分．漏选得 2 分，错选得 0 分）

9. 点$M(1,1)$为圆$x^2+y^2-x+y-2m=0$外一个点，则实数m不可取的值有（　　）

A. $-\frac{1}{4}$　　B. 0　　C. 1　　D. 2

【答案】ACD

【解析】

【分析】由圆$x^2+y^2-x+y-2m=0$的标准方程可知圆心$O\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，半径$r=\sqrt{2m+\frac{1}{2}}>0$，因为点$M(1,1)$在圆外，所以$OM>r$，则可求出$m$的取值范围，选出符合的选项.

【详解】圆$x^2+y^2-x+y-2m=0$的标准方程为$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=2m+\frac{1}{2}$，

可知圆心$O\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$，半径$r=\sqrt{2m+\frac{1}{2}}$，

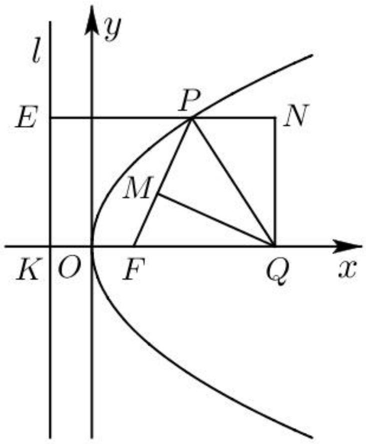
而$r>0$，所以$\sqrt{2m+\frac{1}{2}}>0\Rightarrow m>-\frac{1}{4}$，A 选项不可取;

又因为点$M(1,1)$在圆外，所以$OM>r$，即$\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}>\sqrt{2m+\frac{1}{2}}$，解得$m<1$，CD 选项不可取;

故选：ACD

10. 如图，在平面直角坐标系xOy中，抛物线C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l．设l与x轴的

交点为K，P为抛物线C上异于O的任意一点，P在l上的射影为E，$\angle EPF$的外角平分线交x轴于点Q，过Q作$QM\perp PF$交PF于M，过Q作$QN\perp EP$交线段EP的延长线于N，则（　　）



A. $|PE|=|PF|$　　B. $|PF|=|QF|$　　C. $|PN|=|MF|$　　D. $|PN|=|KF|$

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据抛物线的定义以及平面几何知识即可判断各选项的真假.

【详解】对 A，由抛物线的定义可知$|PE|=|PF|$，故 A 正确；

对 B，因为PQ是$\angle EPF$的外角平分线，所以$\angle FPQ=\angle NPQ$，又$EN\parallel KQ$，所以$\angle NPQ=\angle PQF$，所以$\angle FPQ=\angle PQF$，所以$|PF|=|QF|$，故 B 正确；

对 C，若$|PN|=|MF|$，则有$\triangle FMQ\cong\triangle PNQ$，从而有$|FQ|=|PQ|$，所以$\angle PFQ=\dfrac{\pi}{3}$，此时$P$为定点，与$P$为抛物线$C$上异于$O$的任意一点矛盾，故 C 不正确；

对 D，因为四边形$KQNE$是矩形，所以$|EN|=|KQ|$，又$|PE|=|PF|=|QF|$，所以$|PN|=|KF|$，故 D 正确.

故选：ABD.

11. 瑞士数学家欧拉 1765 年在其所著的《三角形的几何学》一书中提出：任意三角形的外心、重心、垂心在同一条直线上，后人称这条直线为欧拉线．已知$\triangle ABC$的顶点$A(2,0)$、$B(0,4)$，其欧拉线方程为$x+y-2=0$，则顶点C的坐标不可以是（　　）

A. $(-2,2)$　　B. $(-1,1)$　　C. $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$

【答案】BC

【解析】

【分析】由已知求出 AB 的垂直平分线方程，与欧拉线方程联立求得外心坐标，从而得到圆的方程，设 $C\left(x_0,y_0\right)$，根据三角形 ABC 的重心 $\left(\frac{x_0+2}{3},\frac{y_0+4}{3}\right)$ 在欧拉线上，再与圆的方程联立即可求出 C 的坐标，从而选出选项.

【详解】$\because A(2,0)$，$B(0,4)$，$\therefore AB$ 的垂直平分线方程为 $x-2y+3=0$，

又因为外心在欧拉线 $x+y-2=0$ 上，

联立 $\begin{cases}x-2y+3=0\\x+y-2=0\end{cases}$，解得三角形 ABC 的外心为 $G\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$，

又 $\because r=|GA|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-2\right)^2+\left(\frac{5}{3}-0\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$，

$\therefore \triangle ABC$ 的外接圆方程为 $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{50}{9}$.

设 $C\left(x_0,y_0\right)$，则三角形 ABC 的重心 $\left(\frac{x_0+2}{3},\frac{y_0+4}{3}\right)$ 在欧拉线上，

即 $\frac{2+x_0}{3}+\frac{4+y_0}{3}-2=0$，整理得：$x_0+y_0=0$，

又因为 $C\left(x_0,y_0\right)$ 在外接圆上，得 $\left(x_0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y_0-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{50}{9}$，

联立 $\begin{cases}x_0+y_0=0\\\left(x_0-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y_0-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{50}{9}\end{cases}$，解得：$\begin{cases}x_0=-2\\y_0=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=\frac{2}{3}\\y_0=-\frac{2}{3}\end{cases}$，

所以顶点 C 的坐标可以是 $(-2,2)$ 或 $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$，

反之 $(-1,1)$ 与 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 不满足条件.

故选：BC.

12. 已知 $M\left(x_1,2\sqrt{2}-x_1\right),N(x_2,\sqrt{1-8x_2^2})$，令 $S=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(x_1+\sqrt{1-8x_2^2}-2\sqrt{2}\right)^2}$，则 S 取到的值可以有（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】BCD

【解析】

【分析】由题意点M为直线$y=2\sqrt{2}-x$上的点，点N为曲线$y=\sqrt{1-8x^2}$上的点，S看作点M到点N的距离，设与直线$y=2\sqrt{2}-x$平行且与椭圆$\frac{x^2}{\frac{1}{8}}+y^2=1\left(y\geq 0\right)$相切的直线方程为$y=-x+C$，求出此直线方程，从而可求得S的最小值，即可得解.

【详解】由$M\left(x_1,2\sqrt{2}-x_1\right)$，得点$M$为直线$y=2\sqrt{2}-x$上的点，

由$N(x_2,\sqrt{1-8x_2^2})$，得点N为曲线$y=\sqrt{1-8x^2}$上的点，

由$S=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(x_1+\sqrt{1-8x_2^2}-2\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left[\sqrt{1-8x_2^2}-\left(2\sqrt{2}-x_1\right)\right]^2}$，

可以看作点M到点N的距离，

由$y=\sqrt{1-8x^2}$，得$\frac{x^2}{\frac{1}{8}}+y^2=1\left(y\geq 0\right)$，

所以点N为椭圆$\frac{x^2}{\frac{1}{8}}+y^2=1\left(y\geq 0\right)$且在$x$轴上方的点，

设与直线$y=2\sqrt{2}-x$平行且与椭圆$\frac{x^2}{\frac{1}{8}}+y^2=1\left(y\geq 0\right)$相切的直线方程为$y=-x+C$，

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{\frac{1}{8}}+y^2=1\\ y=-x+C\end{cases}$，消$y$得$9x^2-2Cx+C^2-1=0$，

则$\Delta=4C^2-36\left(C^2-1\right)=0$，解得$C=\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}$（$-\frac{3\sqrt{2}}{4}$舍去），

则$y=-x+\frac{3\sqrt{2}}{4}$，

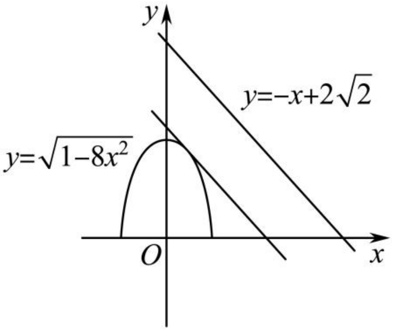
直线$y=2\sqrt{2}-x$与直线$y=-x+\frac{3\sqrt{2}}{4}$得距离$d=\frac{\frac{5\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{4}$，

所以点 M 到点 N 的距离大于等于 $\frac{5}{4}$，

所以 $S \geq \frac{5}{4}$，

故符合的选项为 BCD.

故选：BCD.



三、填空题（本题共 4 道小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 双曲线 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{k}=1$ 的离心率 $e \in (1,2)$，则实数 k 的取值范围是__________.

【答案】$(-12,0)$

【解析】

【分析】由已知可得 $a^2=4, b^2=-k, c^2=4-k, e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{4-k}}{2}$，再由 $e \in (1,2)$，解不等式可得 k 的取值范围

【详解】双曲线方程可变形为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{-k}=1$，则 $a^2=4, b^2=-k, c^2=4-k, e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{4-k}}{2}$.

又因为 $e \in (1,2)$，即 $1<\frac{\sqrt{4-k}}{2}<2$，解得 $-12<k<0$.

故答案为：$(-12,0)$

【点睛】此题考查由双曲线的离心率的范围求参数的取值范围，属于基础题

14. 直线 l 过点 $A(-1,2), B(-1,\pi)$，则直线 l 的方程为________________.

【答案】$x=-1$

【解析】

【分析】直接根据直线上两点的坐标写出直线方程即可.

【详解】解：因为直线 l 过点 $A(-1,2), B(-1,\pi)$，

所以直线 l 的方程为 $x=-1$.

故答案为：$x=-1$.

15. 已知空间向量$\vec{a}=(-2,3,-5)$，则向量$\vec{a}$在坐标平面yOz上的投影向量为__________.

【答案】$(0,3,-5)$

【解析】

【分析】根据投影向量的定义即可得出答案.

【详解】解：当向量$\vec{a}=(-2,3,-5)$的坐标原点为始点时，

其中点$A(-2,3,-5)$在坐标平面yOz上的投影坐标为$(0,3,-5)$，

所以向量$\vec{a}$在坐标平面yOz上的投影向量为$(0,3,-5)$.

故答案为：$(0,3,-5)$.

16. 已知椭圆E的两个焦点分别为F_1,F_2，点P为椭圆上一点，且$\tan PF_1F_2=\frac{1}{3}$，$\tan PF_2F_1=3$，则椭圆E的离心率为 __.

【答案】$\frac{\sqrt{10}}{4}$

【解析】

【分析】由题意得到$\tan PF_1F_2\left(-\tan PF_2F_1\right)=-1$，即$PF_1\perp PF_2$，进而求得$|PF_1|=\frac{6c}{\sqrt{10}},|PF_2|=\frac{2c}{\sqrt{10}}$，结合$|PF_1|+|PF_2|=2a$，得到$\frac{8c}{\sqrt{10}}=2a$，即可求得椭圆的离心率.

【详解】因为$\tan PF_1F_2=\frac{1}{3}$，$\tan PF_2F_1=3$，则$\tan PF_1F_2\left(-\tan PF_2F_1\right)=-1$，

所以$PF_1\perp PF_2$，

且$\cos PF_1F_2=\frac{3}{\sqrt{10}},\sin PF_1F_2=\frac{1}{\sqrt{10}}$，

所以$|PF_1|=|F_1F_2|\cos\angle PF_1F_2=\frac{6c}{\sqrt{10}},|PF_2|=|F_1F_2|\sin\angle PF_1F_2=\frac{2c}{\sqrt{10}}$，

又由$|PF_1|+|PF_2|=2a$，即$\frac{6c}{\sqrt{10}}+\frac{2c}{\sqrt{10}}=2a$，即$\frac{8c}{\sqrt{10}}=2a$，

所以$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{4}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

四、解答题（本题共4道小题，共 40 分，写出必要的文字说明与演算步骤）

17. 若直线l的方程为$ax+2y-a-2=0(a\in R)$.

（1）若直线l与直线$m:2x-y=0$垂直，求a的值；

（2）若直线l在两轴上的截距相等，求该直线的方程.

【答案】（1）1；（2）$x-y=0$，$x+y-2=0$.

【解析】

【分析】（1）直线l与直线$m:2x-y=0$垂直，可得$2a-2=0$，解得a.

（2）当$a=0$时，直线l化为：$y=1$．不满足题意．当$a\neq 0$时，可得直线l与坐标轴的交点$(0,\dfrac{a+2}{2})$，$\left(\dfrac{a+2}{a},0\right)$．根据直线$l$在两轴上的截距相等，即可得出．

【详解】解：（1）$\because$直线l与直线$m:2x-y=0$垂直，

$\therefore 2a-2=0$，解得$a=1$.

（2）当$a=0$时，直线l化为：$y=1$．不满足题意．

当$a\neq 0$时，可得直线l与坐标轴的交点$(0,\dfrac{a+2}{2})$，$\left(\dfrac{a+2}{a},0\right)$.

$\because$直线l在两轴上的截距相等，$\therefore\dfrac{a+2}{2}=\dfrac{a+2}{a}$，解得：$a=\pm 2$.

$\therefore$该直线的方程为：$x-y=0$，$x+y-2=0$.

【点睛】本题考查了直线的方程、相互垂直的直线斜率之间关系、方程的解法，考查了推理能力与计算能力，属于基础题.

18. 已知以点$A(-1,2)$为圆心的圆与______，过点$B(-2,0)$的动直线l与圆A相交于M，N两点.从①直线$x+2y+7=0$相切；②圆$(x-3)^2+y^2=20$关于直线$2x-y-1=0$对称；③圆$(x-3)^2+(y-2)^2=5$的公切线长$\sqrt{11}$这3个条件中任选一个，补充在上面问题的横线上并回答下列问题.

（1）求圆A的方程;

（2）当$|MN|=2\sqrt{19}$时，求直线l的方程.

【答案】（1）$(x+1)^2+(y-2)^2=20$；

（2）$3x-4y+6=0$，或 $x=-2$.

【解析】

【分析】（1）选①：根据圆的切线性质进行求解即可；

选②：根据圆与圆的对称性进行求解即可；

选③：根据两圆公切线的性质进行求解即可.

（2）利用圆的垂径定理，结合点到直线距离公式进行求解即可.

【小问 1 详解】

选①：因为圆 A 与直线 $x+2y+7=0$ 相切，

所以圆 A 的半径为 $\dfrac{|-1\times1+2\times2+7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$，

因此圆 A 的方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=20$；

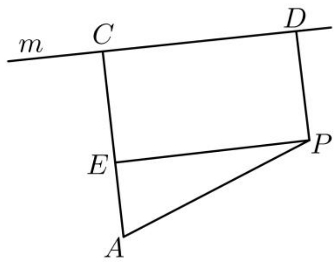
选②：因为圆 A 与圆 $(x-3)^2+y^2=20$ 关于直线 $2x-y-1=0$ 对称，

所以两个圆的半径相等，因此圆 A 的半径为 $2\sqrt{5}$，

所以圆 A 的方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=20$；

选③：设圆 $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ 的圆心为 $P(3,2)$，两圆的一条公切线为 m

两圆的圆心与两圆的一条公切线示意图如下：



设圆 A 的半径 r，

因此有：$(r-\sqrt{5})^2+(\sqrt{11})^2=(\sqrt{(-1-3)^2+(2-2)^2})^2\Rightarrow r=2\sqrt{5}$，

所以圆 A 的方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=20$；

【小问 2 详解】

三种选择圆 A 的方程都是 $(x+1)^2+(y-2)^2=20$，

当过点 $B(-2,0)$ 的动直线 l 不存在斜率时，直线方程为 $x=-2$，

把 $x=-2$ 代入 $(x+1)^2+(y-2)^2=20$ 中，得 $y=2\pm\sqrt{19}$，

显然 $2+\sqrt{19}-(2-\sqrt{19})=2\sqrt{19}$，符合题意，

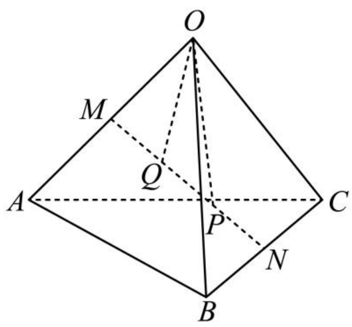
当过点 $B(-2,0)$ 的动直线 l 存在斜率时，设为 k，直线方程为 $y=k(x+2)\Rightarrow kx-y+2k=0$，圆心到该直线的距离为：$\dfrac{|-k-2+2k|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}}$，

因为 $|MN|=2\sqrt{19}$，所以有 $(\dfrac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}})^2+(\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{19})^2=20\Rightarrow k=\dfrac{3}{4}$，

即方程为：$3x-4y+6=0$

综上所述：直线 l 的方程为 $3x-4y+6=0$，或 $x=-2$.

19. 如图，M、N 分别是四面体 $OABC$ 的棱 OA、BC 的中点，P、Q 是 MN 的三等分点（点 P 靠近点 N），若 $\overrightarrow{AO}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，解答下列问题：



（1）以 $\left\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right\}$ 为基底表示 $\overrightarrow{OP}$；

（2）若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\angle OAB=\angle OAC=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle CAB=\dfrac{2\pi}{3}$，求 $|\overrightarrow{OP}|$ 的值.

【答案】（1）$\overrightarrow{OP}=-\dfrac{5}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

（2）$\dfrac{\sqrt{29}}{6}$

【解析】

【分析】（1）根据空间向量的线性运算结合图形计算即可；

（2）根据 $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{\left(-\dfrac{5}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)^2}$ 结合数量积的运算律计算即可.

【小问 1 详解】

解：$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MP}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AO}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MN}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AO}+\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}\right)$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AO}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\frac{5}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$；

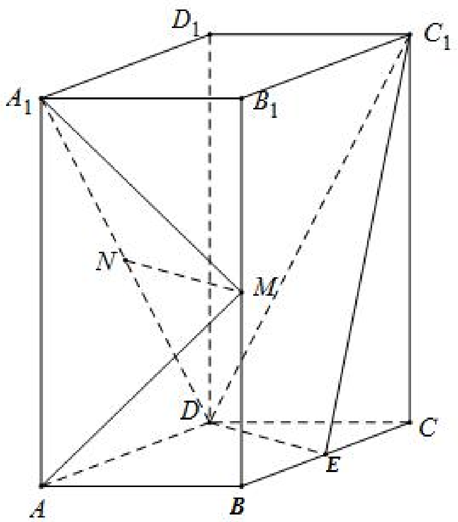
【小问 2 详解】

解：$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{\left(-\frac{5}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{25}{36}\vec{a}^2+\frac{1}{9}\vec{b}^2+\frac{1}{9}\vec{c}^2-\frac{5}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{5}{9}\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{2}{9}\vec{c}\cdot\vec{b}}$

$=\sqrt{\frac{25}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-0-0+\frac{2}{9}\times1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{29}}{6}$.

20. 如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，E，M，N 分别是 BC，BB_1，A_1D 的中点.



（1）证明：$MN//$ 平面 C_1DE;

（2）求二面角 $A\text{-}MA_1\text{-}N$ 的正弦值.

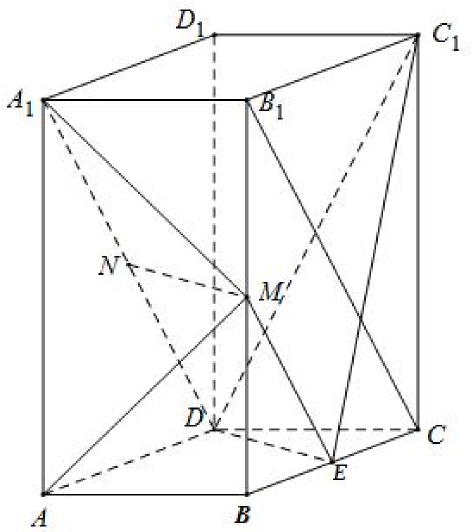
【答案】（1）见解析；（2）$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

【解析】

【分析】（1）利用三角形中位线和 $A_1D\underline{\underline{//}}B_1C$ 可证得 $ME\underline{\underline{//}}ND$，证得四边形 $MNDE$ 为平行四边形，进而证得 $MN//DE$，根据线面平行判定定理可证得结论；（2）以菱形 $ABCD$ 对角线交点为原点可建立空间直角坐标系，通过取 AB 中点 F，可证得 $DF\perp$ 平面 AMA_1，得到平面 AMA_1 的法向量 $\overrightarrow{DF}$；再通过向量法

求得平面 MA_1N 的法向量 $\vec{n}$，利用向量夹角公式求得两个法向量夹角的余弦值，进而可求得所求二面角的正弦值.

【详解】(1) 连接 ME，B_1C



$\because M$，E 分别为 BB_1，BC 中点　　$\therefore ME$ 为 ΔB_1BC 的中位线

$\therefore ME//B_1C$ 且 $ME=\dfrac{1}{2}B_1C$

又 N 为 A_1D 中点，且 $A_1D \underline{\underline{//}} B_1C$　$\therefore ND//B_1C$ 且 $ND=\dfrac{1}{2}B_1C$

$\therefore ME \underline{\underline{//}} ND$　$\therefore$ 四边形 $MNDE$ 为平行四边形

$\therefore MN//DE$，又 $MN \not\subset$ 平面 C_1DE，$DE \subset$ 平面 C_1DE

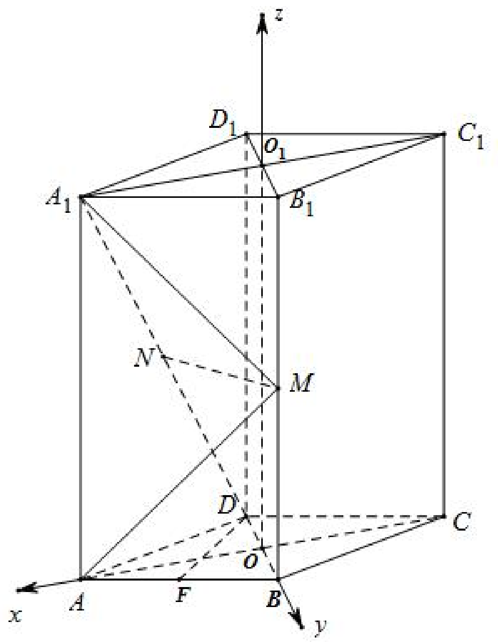
$\therefore MN//$ 平面 C_1DE

(2) 设 $AC \cap BD = O$，$A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$

由直四棱柱性质可知：$OO_1 \perp$ 平面 $ABCD$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形　　$\therefore AC \perp BD$

则以 O 为原点，可建立如下图所示的空间直角坐标系：



则：$A\left(\sqrt{3},0,0\right)$，$M\left(0,1,2\right)$，$A_1\left(\sqrt{3},0,4\right)$，D（0，-1,0）$N\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},2\right)$

取 AB 中点 F，连接 DF，则 $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形且 $\angle BAD=60^\circ$ $\quad\therefore \Delta BAD$ 为等边三角形 $\therefore DF\perp AB$

又 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，$DF\subset$ 平面 $ABCD$ $\therefore DF\perp AA_1$

$\therefore DF\perp$ 平面 ABB_1A_1，即 $DF\perp$ 平面 AMA_1

$\therefore \overrightarrow{DF}$ 为平面 AMA_1 的一个法向量，且 $\overrightarrow{DF}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0\right)$

设平面 MA_1N 的法向量 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，又 $\overrightarrow{MA_1}=\left(\sqrt{3},-1,2\right)$，$\overrightarrow{MN}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$

$\therefore\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MA_1}=\sqrt{3}x-y+2z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MN}=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3}{2}y=0\end{cases}$，令 $x=\sqrt{3}$，则 $y=1$，$z=-1$ $\quad\therefore \vec{n}=\left(\sqrt{3},1,-1\right)$

$\therefore \cos<\overrightarrow{DF},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{DF}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{DF}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{3}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$ $\quad\therefore \sin<\overrightarrow{DF},\vec{n}>=\frac{\sqrt{10}}{5}$

$\therefore$ 二面角 $A-MA_1-N$ 的正弦值为：$\frac{\sqrt{10}}{5}$

【点睛】本题考查线面平行关系的证明、空间向量法求解二面角的问题.求解二面角的关键是能够利用垂直

关系建立空间直角坐标系，从而通过求解法向量夹角的余弦值来得到二面角的正弦值，属于常规题型.

21. 在平面直角坐标系中，$C_1\left(0,-\sqrt{2}\right)$，圆 $C_2: x^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=12$，动圆 P 过 C_1 且与圆 C_2 相切.

（1）求动点 P 的轨迹 C 的标准方程；

（2）若直线 l 过点 $(0,1)$，且与曲线 C 交于 A 、 B，已知 AB 的中点在直线 $x=-\frac{1}{4}$ 上，求直线 l 的方程.

【答案】（1）$\frac{y^2}{3}+x^2=1$；（2） $y=x+1$ 或 $y=3x+1$.

【解析】

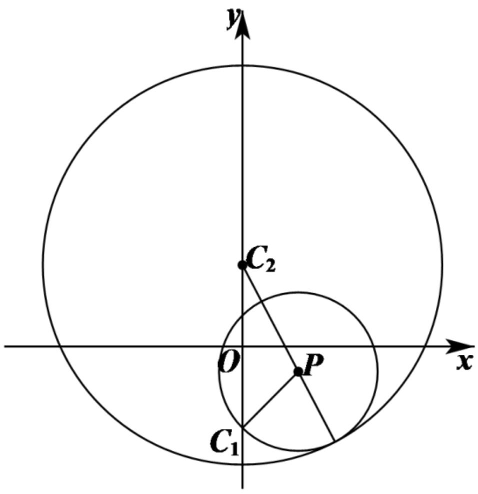
【分析】

（1）由题意可知，圆 P 内切于圆 C_2，根据椭圆的定义可知，P 点的轨迹是以 C_1、C_2 为焦点的椭圆，计算出 a 、 b 的值，结合焦点的位置可求得轨迹 C 的标准方程；

（2）由题意可知，直线 l 的斜率存在，设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，设点 $A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$，将直线 l 的方程与曲线 C 的方程联立，列出韦达定理，根据 $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{1}{4}$ 可得出关于 k 的方程，求出 k 的值，即可求得直线 l 的方程.

【详解】（1）设动圆 P 的半径为 r，由于 C_1 在圆 C_2 内，所以，圆 P 内切于圆 C_2，

由题意知：$\left|PC_1\right|=r$，$\left|PC_2\right|=2\sqrt{3}-r$



所以 $\left|PC_1\right|+\left|PC_2\right|=2\sqrt{3}>\left|C_1C_2\right|=2\sqrt{2}$，

所以 P 点的轨迹是以 C_1、C_2 为焦点的椭圆.

其长轴长 $2a=2\sqrt{3}$，焦距为 $2c=2\sqrt{2}$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，

所以曲线C的标准方程为：$\dfrac{y^2}{3}+x^2=1$；

（2）若直线l的斜率不存在，则A、B关于x轴对称，不合题意；

若直线l的斜率存在，设其方程为$y=kx+1$，设点$A\left(x_1,y_1\right)$、$B\left(x_2,y_2\right)$，

将$y=kx+1$代入$\dfrac{y^2}{3}+x^2=1$得：$\left(3+k^2\right)x^2+2kx-2=0$，

$\Delta=4k^2+8\left(3+k^2\right)=12\left(k^2+2\right)>0$，

所以$x_1+x_2=-\dfrac{2k}{3+k^2}$，所以$\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{k}{3+k^2}=-\dfrac{1}{4}$

所以$k^2-4k+3=0$，解得$k=1$或$k=3$，

所以，直线l的方程为：$y=x+1$或$y=3x+1$.

【点睛】方法点睛：利用韦达定理法解决直线与圆锥曲线相交问题的基本步骤如下：

（1）设直线方程，设交点坐标为$\left(x_1,y_1\right)$、$\left(x_2,y_2\right)$；

（2）联立直线与圆锥曲线的方程，得到关于x（或y）的一元二次方程，必要时计算Δ；

（3）列出韦达定理；

（4）将所求问题或题中的关系转化为x_1+x_2、x_1x_2的形式；

（5）代入韦达定理求解.

22. 已知$P(1，2)$在抛物线C：$y^2=2px$上.

（1）求抛物线C的方程；

（2）A，B是抛物线C上的两个动点，如果直线PA的斜率与直线PB的斜率之和为2，证明：直线AB过定点.

【答案】（1）$y^2=4x$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】(1)把已知点坐标代入抛物线方程求得参数p，即得抛物线方程；

(2)设AB: $x=my+t$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线方程与抛物线方程联立消元后应用韦达定理得y_1+y_2,y_1y_2，代入$k_{PA}+k_{PB}$得参数t值，从而可得定点坐标.

【小问1详解】

P点坐标代入抛物线方程得$4=2p$，

$\therefore p=2$，

$\therefore$抛物线方程为 $y^2=4x$.

【小问 2 详解】

证明：设 AB：$x=my+t$，将 AB 的方程与 $y^2=4x$ 联立得 $y^2-4my-4t=0$，

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4t$，

所以$\Delta>0\Rightarrow 16m^2+16t>0\Rightarrow m^2+t>0$，

$k_{PA}=\dfrac{y_1-2}{x_1-1}=\dfrac{y_1-2}{\dfrac{y_1^2}{4}-1}=\dfrac{4}{y_1+2}$，同理：$k_{PB}=\dfrac{4}{y_2+2}$，

由题意：$\dfrac{4}{y_1+2}+\dfrac{4}{y_2+2}=2$，

$\therefore 4(y_1+y_2+4)=2(y_1y_2+2y_1+2y_2+4)$，

$\therefore y_1y_2=4$，

$\therefore -4t=4$，

$\therefore t=-1$，

故直线 AB 恒过定点$(-1, 0)$.