2017年秋高三（上）期末测试卷
理科数学

理科数学测试卷共4页，满分150分。考试时间120分钟。

注意事项：

1. 本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第Ⅰ卷时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦擦干净后，再选涂其它答案标号框。写在本试卷上无效。
3. 回答第Ⅱ卷时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个备选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_4=13$，则$\{a_n\}$的公差为

（A）$\dfrac{5}{3}$　　（B）2　　（C）10　　（D）13

（2）已知集合$A=\{x\in R\,|\,2<x<5\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6\}$，则$(\complement_R A)\cap B=$

（A）$\{1,2\}$　　（B）$\{5,6\}$　　（C）$\{1,2,5,6\}$　　（D）$\{3,4,5,6\}$

（3）命题p："若$x>1$，则$x^2>1$"，则命题p以及它的否命题、逆命题、逆否命题这四个命题中真命题的个数为

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

（4）已知两非零复数z_1，z_2，若$z_1z_2\in R$，则一定成立的是

（A）$z_1\overline{z_2}\in R$　　（B）$\dfrac{z_1}{z_2}\in R$　　（C）$z_1+z_2\in R$　　（D）$\dfrac{\overline{z_1}}{z_2}\in R$

（5）根据如下样本数据：

x	3	5	7	9
y	6	a	3	2

得到回归方程$\hat{y}=-1.4x+12.4$，则

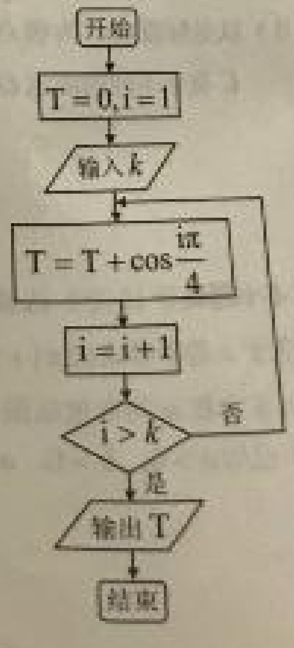
（A）变量x与y之间是函数关系

（B）变量x与y线性正相关

（C）当$x=11$时，可以确定$y=3$

（D）$a=5$

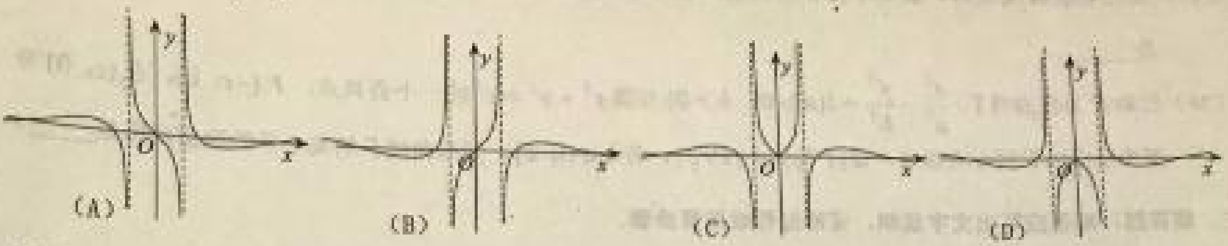
（6）执行如图所示的程序框图，若输入的k值为9，则输出的结果是



（A）$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）0

（C）$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）1

(7) 函数 $f(x)=\frac{x\cos x}{x^2-1}$ 的图象大致为



(8) 甲、乙、丙、丁、戊五位同学相约去学校图书室借阅四大名著（每种名著均有若干本），已知每人均只借阅一本名著，每种名著均有人借阅，且甲只借阅《三国演义》，则不同的借阅方案种数为

(A) 48　　(B) 54　　(C) 60　　(D) 72

(9) 我国古代数学著作《九章算术》中有如下问题："今有人持金出五关，前关二而税一，次关三而税一，次关四而税一，次关五而税一，次关六而税一. 并五关所税，适重一斤." 其意思为"今有人持金出五关，第1关收税金为持金的$\frac{1}{2}$，第2关收税金为剩余金的$\frac{1}{3}$，第3关收税金为剩余金的$\frac{1}{4}$，第4关收税金为剩余金的$\frac{1}{5}$，第5关收税金为剩余金的$\frac{1}{6}$. 5关所收税金之和，恰好重1斤." 则在此问题中，第5关收税金

(A) $\frac{1}{20}$斤　　(B) $\frac{1}{25}$斤　　(C) $\frac{1}{30}$斤　　(D) $\frac{1}{36}$斤

(10) 已知函数 $f(x)=2\cos^2(\omega x+\frac{\pi}{6})-1\ (\omega>0)$ 在区间$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$内单调递减，则$\omega$的最大值是

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{3}{5}$　　(C) $\frac{2}{3}$　　(D) $\frac{3}{4}$

(11) 已知点 $A(4,0)$，$B(0,4)$，点 $P(x,y)$ 的坐标 x，y 满足 $\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\\ 3x+4y-12\leq 0\end{cases}$，则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$ 的最小值为

(A) -8　　(B) $-\frac{196}{25}$　　(C) 0　　(D) $\frac{25}{4}$

(12) 已知关于 x 的不等式 $x\ln x-ax+a<0$ 存在唯一的整数解，则实数 a 的取值范围是

(A) $(2\ln 2,\frac{3}{2}\ln 3]$　　(B) $(\ln 2,\ln 3]$　　(C) $(2\ln 2,+\infty)$　　(D) $[2\ln 2,\frac{3}{2}\ln 3)$

第II卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第13题～第21题为必考题，每个试题考生都必须做. 第22题～第23题为选考题，考生根据要求做答.

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

(13) 二项式 $(x+\frac{1}{\sqrt{x}})^6$ 的展开式中常数项为______.

(14) 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}$，则 $|\vec{b}|=$______.

（15）当正实数m变化时，斜率不为0的定直线l始终与圆$(x-2m)^2+(y+m)^2=m^2$相切，则直线l的方程为______.

（16）已知P为双曲线$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$与圆$x^2+y^2=c^2$的一个公共点，$F_1(-c,\ 0)$，$F_2(c,\ 0)$分别为双曲线$\Gamma$的左右焦点，设$|PF_1|=k|PF_2|$，若$k\in[1,\ 2]$，则双曲线$\Gamma$的离心率的取值范围是______.

三、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（17）（本小题满分12分）

已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=4$，$a_na_{n+1}+4=4a_n$.

（Ⅰ）求证：$\{\frac{2}{a_n-2}\}$为等差数列；

（Ⅱ）设$b_n=(a_n-2)(a_{n+1}-2)$，求数列$\{b_n\}$的前n项和.

（18）（本小题满分12分）

在ΔABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$\sin 2A+\sqrt{3}\cos 2A=\sqrt{3}$.

（Ⅰ）求A；

（Ⅱ）若$b=2\sqrt{3}$，ΔABC的面积为$\sqrt{3}$，求$\frac{a+b+c}{b\cos C+c\cos B}$的值.

（19）（本小题满分12分）

某百货商场举行年终庆典，推出以下两种优惠方案：

方案一：单笔消费每满200元立减50元，可累计；

方案二：单笔消费满200元可参与一次抽奖活动，抽奖规则如下：从装有6个小球（其中3个红球3个白球，它们除颜色外完全相同）的盒子中随机摸出3个小球，若摸到3个红球则按原价的5折付款，若摸到2个红球则按原价的7折付款，若摸到1个红球则按原价的8折付款，若未摸到红球则按原价的9折付款.

单笔消费不低于200元的顾客可从中任选一种优惠方案.

（Ⅰ）某顾客购买一件300元的商品，若他选择优惠方案二，求该顾客最终支付金额不超过250元的概率；

（Ⅱ）若某顾客的购物金额为210元，请用所学概率知识分析他选择哪一种优惠方案更划算？

(20)（本小题满分 12 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点分别是$F_1$，$F_2$，椭圆$C$的上顶点到直线$x+2y-4a=0$的距离为$\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$，过$F_2$且垂直于$x$轴的直线与椭圆$C$相交于$M$，$N$两点，且$|MN|=1$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）过点$(0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$的直线与椭圆C相交于P，Q两点，点$A(\sqrt{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，且$\angle PAQ=90^\circ$，求直线$PQ$的方程.

(21)（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=x\ln x+ax^2$ $(a\neq 0)$存在唯一极值点.

（Ⅰ）求a的取值范围；

（Ⅱ）证明：函数$y=f[f(x)]$与$y=f(x)$的值域相同.

请从下面所给的 22、23 两题中选定一题作答，并用 2B 铅笔在答题卡上将所选题目对应的题号方框涂黑，按所涂题号进行评分；不涂、多涂均按所答第一题评分；多答按所答第一题评分。

(22)（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系xOy中，直线l的方程为$x+y=a$ $(a>0)$，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=1+\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数），点$P$，$Q$分别在直线$l$和曲线$C$上运动，$|PQ|$的最小值为$\dfrac{3}{2}\sqrt{2}-1$.

（Ⅰ）求a的值；

（Ⅱ）以坐标原点O为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，射线$l_1:\theta=\alpha$ $(\rho\geqslant 0,\ 0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$与曲线$C$交于不同的两点$O$，$A$，与直线$l$交于点$B$，若$|OA|=|AB|$，求$\alpha$的值.

(23)（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知关于x的不等式$|2x|+|2x-1|\leqslant m$有解.

（Ⅰ）求实数m的取值范围；

（Ⅱ）已知$a>0$，$b>0$，$a+b=m$，证明：$\dfrac{a^2}{a+2b}+\dfrac{b^2}{2a+b}\geqslant\dfrac{1}{3}$.

2017年秋高三(上)期末测试卷
理科数学　参考答案

一、选择题

1～6 BCBDDC　　7～12 ACBCBA

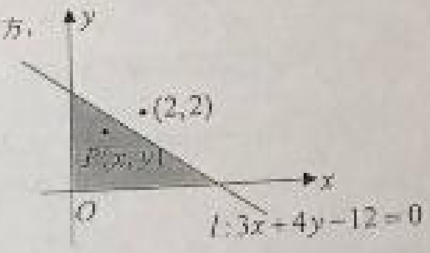
（11）解析：$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=x(x-4)+y(y-4)=(x-2)^2+(y-2)^2-8$，

$(x-2)^2+(y-2)^2$ 即为点 $P(x,y)$ 与点 $(2,2)$ 的距离的平方，

结合图形知，最小值即为点 $(2,2)$ 到直线的距离的平方，

$d=\dfrac{|3\times2+4\times2-12|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{2}{5}$，

故最小值为 $(\dfrac{2}{5})^2-8=-\dfrac{196}{25}$



（12）解析：$x\ln x<a(x-1)$，设 $f(x)=x\ln x$，$g(x)=a(x-1)$，

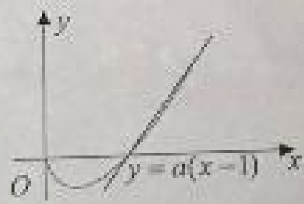
$f'(x)=\ln x+1$，故 $f(x)$ 在 $(0,\dfrac{1}{e})$ 上单减，

在 $(\dfrac{1}{e},+\infty)$ 上单增，$f(1)=0$，故 $f(x)$ 的图象大致如右，

又直线 $g(x)$ 恒过定点 $(1,0)$，

由图形知，$a>0$ 且不等式的唯一整数解为2．

故 $f(2)<g(2)$ 且 $f(3)\geqslant g(3)$，所以 $2\ln2<a$ 且 $3\ln3\geqslant 2a$，即 $2\ln2<a\leqslant\dfrac{3}{2}\ln3$．



二、填空题

（13）15　　（14）3　　（15）$y=-\dfrac{4}{3}x$　　（16）$[\sqrt{5},+\infty)$

（15）提示：设 $l:y=kx+b$，则 $\dfrac{|k\cdot2m+m+b|}{\sqrt{k^2+1}}=m$，即 $(3k^2+4k)m^2+2b(2k+1)m+b^2=0$，

因为该等式对任意 $m>0$ 成立，故 $3k^2+4k=0$，$2b(2k+1)=0$，$b^2=0$，

即 $k=-\dfrac{4}{3}$，$b=0$，$\therefore l:y=-\dfrac{4}{3}x$．

（16）提示：由题知 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$，$|PF_1|-|PF_2|=2a$，又 $|PF_1|=k|PF_2|$，

所以 $(k^2+1)|PF_2|^2=4c^2$，$(k-1)|PF_2|=2a$，即 $\dfrac{k^2+1}{(k-1)^2}=(\dfrac{c}{a})^2=e^2$，

$\dfrac{k^2+1}{(k-1)^2}=\dfrac{k^2+1}{k^2-2k+1}=1+\dfrac{2k}{k^2-2k+1}=1+\dfrac{2}{k+\dfrac{1}{k}-2}$，又 $k\in(1,2]$，$\therefore k+\dfrac{1}{k}\in(2,\dfrac{5}{2}]$，

故 $\dfrac{k^2+1}{(k-1)^2}\in[5,+\infty)$，$\therefore e\in[\sqrt{5},+\infty)$．

三、解答题

（17）（本小题满分12分）

解：（Ⅰ）$\dfrac{2}{a_{n+1}-2}=\dfrac{2}{\dfrac{4a_n-4}{a_n}-2}=\dfrac{a_n}{a_n-2}=1+\dfrac{2}{a_n-2}$，故 $\{\dfrac{2}{a_n-2}\}$ 为等差数列；　……6分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\dfrac{2}{a_n-2}=\dfrac{2}{4-2}+n-1=n$，故 $a_n-2=\dfrac{2}{n}$，$b_n=(a_n-2)(a_{n+1}-2)=\dfrac{2}{n}\cdot\dfrac{2}{n+1}$

$\therefore b_1+b_2+\cdots+b_n=4(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)})=4(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{4n}{n+1}$.

……12 分

（18）（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）$\sin 2A+\sqrt{3}\cos 2A=2\sin(2A+\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$，即 $\sin(2A+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由 $A\in(0,\pi)$ 知 $2A+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{3},\frac{7\pi}{3})$，故 $2A+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，即 $A=\frac{\pi}{6}$ ……6 分

（Ⅱ）由 $\frac{1}{2}2\sqrt{3}\cdot c\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{3}$ 得 $c=2$，从而 $a^2=12+4-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=4$，即 $a=2$，

$\therefore \frac{a+b+c}{b\cos C+c\cos B}=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin B\cos C+\sin C\cos B}=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin(B+C)}=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A}$

$=\frac{a+b+c}{a}=\frac{2+2\sqrt{3}+2}{2}=2+\sqrt{3}$ ……12 分

（19）（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）顾客最终支付金额不超过 250 元，即至少摸到一个红球，故所求概率为 $1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$；……6 分

（Ⅱ）若选择方案一，则需付金额160元；

若选择方案二，设需付金额 X 元，则随机变量 X 的分布列为：

X	105	147	168	189
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

$EX=156.45<160$，故选方案二更划算．……12 分

（20）（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）$\frac{|2b-4a|}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}\Rightarrow 2a-b=3$，$\frac{2b^2}{a}=1\Rightarrow a=2b^2$，故 $4b^2-b=3$，$\therefore b=1$，

$\therefore a=2$，$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；……4 分

（Ⅱ）设直线 PQ 方程为 $y=kx-\frac{\sqrt{2}}{2}$，与椭圆 C 的方程联立消去 y 得

$(1+4k^2)x^2-4\sqrt{2}kx-2=0$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{4\sqrt{2}k}{1+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{-2}{1+4k^2}$，

$\angle PAQ=90^\circ\Rightarrow(x_1-\sqrt{2})(x_2-\sqrt{2})+(y_1-\frac{\sqrt{2}}{2})(y_2-\frac{\sqrt{2}}{2})=0$，即

$(x_1-\sqrt{2})(x_2-\sqrt{2})+(kx_1-\sqrt{2})(kx_2-\sqrt{2})=0$，即 $(1+k^2)x_1x_2-\sqrt{2}(1+k)(x_1+x_2)+4=0$，

$\therefore(1+k^2)\cdot\frac{-2}{1+4k^2}-\sqrt{2}(1+k)\cdot\frac{4\sqrt{2}k}{1+4k^2}+4=0$，即 $3k^2-4k+1=0$，解得 $k=1$ 或 $\frac{1}{3}$

当 $k=1$ 时，直线 PQ 经过 A 点，不满足题意，舍去，故 $k=\frac{1}{3}$，

所以直线 PQ 的方程为 $y=\frac{1}{3}x-\frac{\sqrt{2}}{2}$．……12 分

（21）（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）$f'(x)=\ln x+1+2ax$，$f''(x)=\frac{1}{x}+2a$，当 $a>0$ 时，$f''(x)>0$，

故 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $x\to 0$ 时，$f'(x)<0$，$f'(1)=2a+1>0$，

故 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一实根，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有唯一极值点；（3分）

分类满分

当 $a<0$ 时，$f''(x)>0\Rightarrow x<-\frac{1}{2a}$，故 $f'(x)$ 在 $(0,-\frac{1}{2a})$ 上单增，在 $(-\frac{1}{2a},+\infty)$ 上单减，

若 $f'(-\frac{1}{2a})\leqslant 0$ 则 $f'(x)\leqslant 0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 无极值点，若 $f'(-\frac{1}{2a})>0$，

又 $x\to 0$ 时 $f'(x)<0$，$x\to+\infty$ 时 $f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 有两个极值点；

综上，$a>0$；　……6分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$a>0$，设 $f'(x_0)=0$ 即 $\ln x_0+1+2ax_0=0$，

则 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单增，$\therefore f(x)$ 的值域为 $[f(x_0),+\infty)$，

要使 $y=f[f(x)]$ 与 $y=f(x)$ 的值域相同，只需 $f(x_0)\leqslant x_0$，即 $x_0\ln x_0+ax_0^2\leqslant x_0$，（10分）

即 $\ln x_0+ax_0\leqslant 1$，又 $ax_0=-\frac{1}{2}(\ln x_0+1)$，故 $\frac{1}{2}\ln x_0-\frac{1}{2}\leqslant 1$ 即 $x_0\leqslant e^3$，

故只需证 $x_0\leqslant e^3$，又 $f'(x)$ 单增，所以要证 $x_0\leqslant e^3$ 即证 $f'(e^3)\geqslant 0$，

而 $f'(e^3)=3+1+2ae^3>0$，故得证.　……12分

（22）（本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）$C:(x-1)^2+y^2=1$，故 $\frac{|1-a|}{\sqrt{2}}-1=\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$，$\therefore a=4$；　……5分

（Ⅱ）曲线 $C:\rho=2\cos\theta$，直线 $l:\rho(\cos\theta+\sin\theta)=4$，分别代入 $\theta=\alpha$，得

$\rho_A=2\cos\alpha$，$\rho_B=\frac{4}{\sin\alpha+\cos\alpha}$，由 $|OA|=|AB|$ 知 $\rho_B=2\rho_A$，即

$\frac{4}{\sin\alpha+\cos\alpha}=4\cos\alpha$，$\therefore\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1$ 即 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故 $2\alpha+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ 即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.　……10分

（23）（本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）$|2x|+|2x-1|\geqslant|2x-(2x-1)|=1$，故 $m\geqslant 1$；　……5分

（Ⅱ）由题知 $a+b\geqslant 1$，故 $(\frac{a^2}{a+2b}+\frac{b^2}{2a+b})(a+2b+2a+b)\geqslant(a+b)^2$，

$\therefore\frac{a^2}{a+2b}+\frac{b^2}{2a+b}\geqslant\frac{1}{3}(a+b)\geqslant\frac{1}{3}$.　……10分