福建省龙岩市上杭二中2018-2019学年上学期高三期中文科数学试卷（解析版）

一、选择题（本大题共12小题，共60.0分）

1.　设集合$A=\{x|0\leq x<4\}$，$B=\{x\in N|1\leq x\leq 3\}$，则$A\cap B=($　　$)$

A. $\{x|1\leq x\leq 3\}$　　B. $\{x|0\leq x<4\}$　　C. $\{1,2，3\}$　　D. $\{0,1，2，3\}$

【答案】C
【解析】解：$\because A=\{x|0\leq x<4\}$，$B=\{x\in N|1\leq x\leq 3\}=\{1,2，3\}$，
$\therefore A\cap B=\{1,2，3\}$，
故选：C.
由A与B，求出两集合的交集即可．
此题考查了交集及其运算，熟练掌握交集的定义是解本题的关键．

2.　已知点$(3,1)$和$(-4,6)$在直线$3x-2y+a=0$的两侧，则a的取值范围是$($　　$)$

A. $a<-7$或$a>24$　　B. $a=7$或$a=24$
C. $-7<a<24$　　D. $-24<a<7$

【答案】C
【解析】解：$\because$点$(3,1)$与$B(-4,6)$，在直线$3x-2y+a=0$的两侧，
$\therefore$两点对应式子$3x-2y+a$的符号相反，
即$(9-2+a)(-12-12+a)<0$，
即$(a+7)(a-24)<0$，
解得$-7<a<24$，
故选：C.
根据二元一次不等式组表示平面区域，以及两点在直线两侧，建立不等式即可求解．
题主要考查二元一次不等式表示平面区域，利用两点在直线的两侧得对应式子符号相反是解决本题的关键．

3.　下列说法正确的是$($　　$)$

A.“若$a>1$，则$a^2>1$”的否命题是“若$a>1$，则$a^2\leq 1$”
B. 在$\triangle ABC$中，“$A>B$”是“$\sin^2A>\sin^2B$”必要不充分条件
C.“若$\tan\alpha\neq\sqrt{3}$，则$\alpha\neq\frac{\pi}{3}$”是真命题
D. $\exists x_0\in(-\infty,0)$使得$3^{x_0}<4^{x_0}$成立

【答案】C
【解析】解：对于A，命题的否定既要否定条件又要否定结论，故错；
对于B，在$\triangle ABC$中，“$A>B$”$\Rightarrow a>b\Rightarrow a^2>b^2\Rightarrow(2R\sin A)^2>(2R\sin B)^2\Rightarrow$

$\sin^2A > \sin^2B$，反之亦然，应是充要分条件，故错；

对于 C，若 $\tan\alpha \neq \sqrt{3}$，则$\alpha \neq \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{3}$，故正确；

对于 D，$\forall x_0 \in (-\infty, 0)$使得$3^{x_0} < 4^{x_0}$成立，故错；

故选：C.

A，命题的否定既要否定条件又要否定结论；

B，在$\triangle ABC$中，“$A > B$”$\Rightarrow a > b \Rightarrow a^2 > b^2 \Rightarrow (2R\sin A)^2 > (2R\sin B)^2 \Rightarrow \sin^2A > \sin^2B$，反之亦然；

C，若 $\tan\alpha \neq \sqrt{3}$，则$\alpha \neq \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{3}$；

D，$\forall x_0 \in (-\infty, 0)$使得$3^{x_0} < 4^{x_0}$成立；

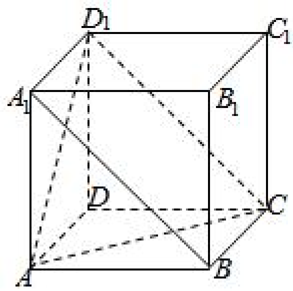
本题考查了命题真假的判定，涉及到了大量的基础知识，属于基础题.

4. 在正方体$ABCD - A_1B_1C_1D_1$中，异面直线A_1B与AD_1所成角的大小为(　　)

A. $30°$　　B. $45°$　　C. $60°$　　D. $90°$

【答案】C

【解析】解：$\because A_1B // D_1C$，



$\therefore$异面直线直线A_1B与AD_1所成的角为$\angle AD_1C$，

$\because \triangle AD_1C$为等边三角形，

$\therefore \angle AD_1C = 60°$.

故选：C.

由$A_1B // D_1C$，得异面直线A_1B与AD_1所成的角为$\angle AD_1C$.

本题考查两异面直线所成角的求法，是基础题，解题时要注意空间思维能力的培养

5. 已知实数$a = 1.7^{0.3}$，$b = 0.9^{0.1}$，$c = \log_2 5$，$d = \log_{0.3}1.8$，那么它们的大小关系是(　　)

A. $c > a > b > d$　B. $a > b > c > d$　C. $c > b > a > d$　D. $c > a > d > b$

【答案】A

【解析】解：$\because d = \log_{0.3}1.8 < \log_{0.3}1 = 0$，$c = \log_2 5 > \log_2 4 = 2$，$0 < b = 0.9^{0.1} < 0.9^0 = 1$，$1.7^1 > a = 1.7^{0.3} > 1.7^0 = 1$

$\therefore d < 0 < b < 1 < a < 2 < c$

故选：A.

根据指数函数的单调性可判断 a，b 与 1 的大小，利用对数函数的单调性可判断 c，d 与 0 及 1 的大小，然后判定选项.

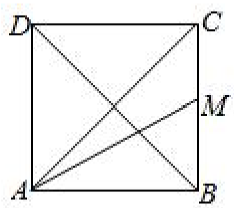
在比较含有指数式与对数式的大小时，一般步骤是先引入 0 把所要比较的数区分，然后在指数式中与 1 比较大小，理论依据是函数的单调性.

6. 若函数$f(x) = (x - 2)(ax + b)$为偶函数，且在$(0, +\infty)$上单调递增，则$f(2 - x) > 0$的解集为(　　)

A. $\{x|x>4$ 或$x<0\}$　　B. $\{x|-2<x<2\}$
C. $\{x|x>2$ 或$x<-2\}$　　D. $\{x|0<x<4\}$

【答案】A
【解析】解：函数$f(x)=(x-2)(ax+b)=ax^2+(b-2a)x-2b$为偶函数，
$\therefore b-2a=0$，$b=2a$，$f(x)=ax^2-4a$.
再根据$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$\therefore a>0$.
令$ax^2-4a=0$，求得$x=\pm 2$，
则由$f(2-x)>0$，可得 $2-x>2$，或 $2-x<-2$，求得$x<0$，或$x>4$，
故$f(2-x)>0$ 的解集为$\{x|x>4$ 或$x<0\}$，
故选：A.
由题意利用函数的奇偶性和单调性、二次函数的性质，求得$f(2-x)>0$ 的解集.
本题主要考查函数的奇偶性和单调性的综合应用，二次函数的性质，属于基础题.

7. 如图，正方形 $ABCD$ 中，M 是 BC 的中点，若$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BD}$，则$\lambda+\mu=(\quad)$



A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{15}{8}$

D. 2

【答案】B

【解析】解：$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$；

$$\therefore \overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BD}$$
$$=\lambda(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})+\mu(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$$

$=(\lambda-\mu)\overrightarrow{AB}+(\frac{\lambda}{2}+\mu)\overrightarrow{AD}$；

$\therefore$由平面向量基本定理得：$\begin{cases}\lambda-\mu=1\\ \frac{\lambda}{2}+\mu=1\end{cases}$；

解得$\lambda=\frac{4}{3},\mu=\frac{1}{3}$；

$\therefore \lambda+\mu=\frac{5}{3}$.

故选：B.

根据向量加法、减法及数乘的几何意义便可得出$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$，代入$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BD}$并进行向量的数乘运算便可得出$\overrightarrow{AC}=(\lambda-\mu)\overrightarrow{AB}+(\frac{\lambda}{2}+\mu)\overrightarrow{AD}$，而

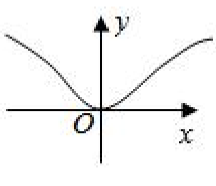
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，这样根据平面向量基本定理即可得出关于$\lambda$，$\mu$的方程组，解出$\lambda$，$\mu$便可得出$\lambda+\mu$的值．
考查向量加法、减法，及数乘的几何意义，以及向量的数乘运算，相等向量的概念，平面向量基本定理．

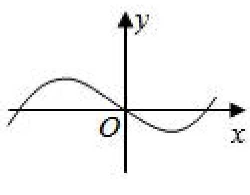
8. 设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项的和$a_1=1$，$\frac{S_{2017}}{2017}-\frac{S_{2015}}{2015}=1$，则数列$\{\frac{1}{S_n}\}$的前 2017 项和为(　　)

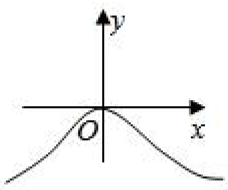
A. $\frac{2017}{1009}$　　B. $\frac{2017}{2018}$　　C. $\frac{1}{2017}$　　D. $\frac{1}{2018}$

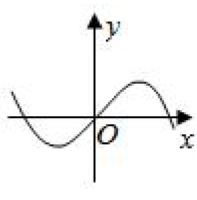
【答案】A
【解析】解：S_n为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项的和$a_1=1$，设公差为 d，
$\because \frac{S_{2017}}{2017}-\frac{S_{2015}}{2015}=1=\frac{2017a_1+\frac{2017\cdot 2016}{2}d}{2017}-\frac{2015a_1+\frac{2015\cdot 2014}{2}d}{2015}=a_1+1008d-(a_1+1007d)=d$，
$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=n$，$S_n=n\cdot 1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 1=\frac{n(n+1)}{2}$，
$\therefore \frac{1}{S_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$，
则数列$\{\frac{1}{S_n}\}$的前 2017 项和为 $2[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018})=2(1-\frac{1}{2018})=\frac{2017}{1009}$，
故选：A．
利用等差数列的性质，等差数列的通项公式以及前 n 项和公式，求得数列用裂项法进行求和$\{a_n\}$的通项公式、前 n 项公式，可得数列$\{\frac{1}{S_n}\}$的通项公式，进而用裂项法求得它的前 2017 项和．
本题主要考查等差数列的性质，等差数列的通项公式以及前 n 项和公式，用裂项法进行求和，属于中档题．

9. 函数$f(x)=(\frac{2}{1+e^x}-1)\cos x$(其中 e 为自然对数的底数)图象的大致形状是(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【解析】解：$f(x)=(\frac{2}{1+e^x}-1)\cos x=\frac{1-e^x}{1+e^x}\cos x$，

$f(-x)=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\cos(-x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}\cos x=-f(x)$．

$\therefore f(x)$为奇函数，图象关于原点对称，排除A，C；

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$e^x>1$，$\cos x>0$，

$\therefore f(x)=\frac{1-e^x}{1+e^x}\cos x<0$，

故选：B．

判断$f(x)$的单调性，再根据$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上的函数值的符号得出答案．

本题考查了函数图象的判断，只有函数单调性、奇偶性的应用，属于中档题．

10. 已知$\overrightarrow{AB}=(\cos23°,\cos67°)$，$\overrightarrow{BC}=(2\cos68°,2\cos22°)$，则$\triangle ABC$的面积为(　　)

A. 2　　　B. $\sqrt{2}$　　　C. 1　　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】D
【解析】解：根据题意，$\overrightarrow{AB}=(\cos23°,\cos67°)$，则$\overrightarrow{BA}=-(\cos23°,\sin23°)$，有$|\overrightarrow{BA}|=1$，
由于，$\overrightarrow{BC}=(2\cos68°,2\cos22°)=2(\cos68°,\sin68°)$，则$|\overrightarrow{BC}|=2$，
则$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-2(\cos23°\cos68°+\sin23°\sin68°)=-2\times\cos45°=-\sqrt{2}$，

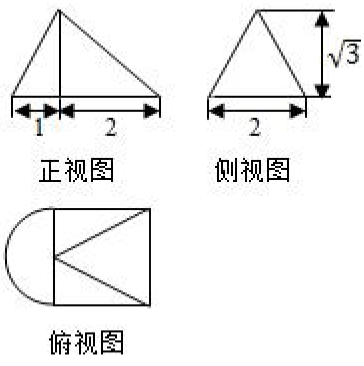
可得：$\cos\angle B=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

则$\angle B=135°$，

则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\sin\angle B=\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

故选：D．
根据题意，利用$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$的坐标，可得$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$的模，由数量积公式，可得$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$的值，进而由$\cos\angle B=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}$，可得$\cos\angle B$，由余弦函数的性质，可得$\angle B$，最后由三角形面积公式，计算可得答案．
本题考查数量积的坐标运算，关键是由余弦函数的和角公式求出$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，注意角$B$是向量$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{BC}$的夹角，属于中档题．

11. 一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积为(　　)



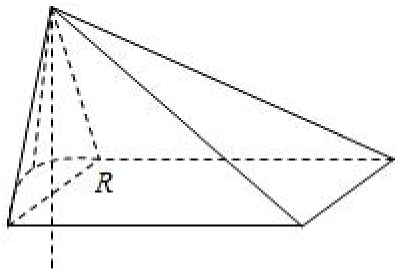
A. $\frac{(9+2\pi)\sqrt{3}}{6}$

B. $\frac{(8+2\pi)\sqrt{3}}{6}$

C. $\frac{(6+\pi)\sqrt{3}}{6}$

D. $\frac{(8+\pi)\sqrt{3}}{6}$

【答案】D



【解析】解：这个几何体由半个圆锥与一个四棱锥组合而成，

半个圆锥的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\pi\times 1\times\sqrt{3}=\frac{1}{6}\pi\sqrt{3}$；

四棱锥的体积为$\frac{1}{3}\times 2\times 2\times\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$；

故这个几何体的体积$V=\frac{(8+\pi)\sqrt{3}}{6}$；

故选：D.

这个几何体由半个圆锥与一个四棱锥组合而成，从而求两个体积之和即可.

本题考查了学生的空间想象力与计算能力，属于基础题.

12. 已知$a\in R$，若$f(x)=(x+\frac{a}{x})e^x$在区间$(0,1)$上只有一个极值点，则a的取值范围为(　　)

A. $a>0$　　B. $a\leq 1$　　C. $a>1$　　D. $a\leq 0$

【答案】A

【解析】解：$\because f(x)=(x+\frac{a}{x})e^x$，

$\therefore f'(x)=(\frac{x^3+x^2+ax-a}{x^2})e^x$，

设$h(x)=x^3+x^2+ax-a$，

$\therefore h'(x)=3x^2+2x+a$，

$a>0$，$h'(x)>0$在$(0,1)$上恒成立，即函数$h(x)$在$(0,1)$上为增函数，

$\because h(0)=-a<0$，$h(1)=2>0$，

$\therefore h(x)$在$(0,1)$上有且只有一个零点x_0，使得$f'(x_0)=0$，

且在$(0,x_0)$上，$f'(x)<0$，在$(x_0,1)$上，$f'(x)>0$，

$\therefore x_0$为函数$f(x)$在$(0,1)$上唯一的极小值点；

$a=0$时，$x\in(0,1)$，$h'(x)=3x^2+2x>0$成立，函数$h(x)$在$(0,1)$上为增函数，

此时$h(0)=0$，$\therefore h(x)>0$在$(0,1)$上恒成立，

即$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$(0,1)$上为单调增函数，函数$f(x)$在$(0,1)$上无极值；

$a<0$时，$h(x)=x^3+x^2+a(x-1)$，

$\because x\in(0,1)$，$\therefore h(x)>0$在$(0,1)$上恒成立，

即$f'(x)>0$，函数$f(x)$在$(0,1)$上为单调增函数，函数$f(x)$在$(0,1)$上无极值.

综上所述，$a>0$.

故选：A.

求导数，分类讨论，利用极值、函数单调性，即可确定 a 的取值范围.
本题考查导数知识的综合运用，考查函数的单调性、极值，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分）

13. 在锐角三角形 ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知$a=\sqrt{7}$，$b=3$，$\sqrt{7}\sin B+\sin A=2\sqrt{3}$.
    (1)求角 A 的大小；
    (2)求$\triangle ABC$的面积.

【答案】解：(1)锐角$\triangle ABC$ 中，由条件利用正弦定理可得

$\frac{\sqrt{7}}{\sin A}=\frac{3}{\sin B}$,

$\therefore \sqrt{7}\sin B=3\sin A$，

再根据$\sqrt{7}\sin B+\sin A=2\sqrt{3}$，

求得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore$角$A=\frac{\pi}{3}$；…(5 分)

(2)锐角$\triangle ABC$ 中，由条件利用余弦定理可得

$a^2=7=c^2+9-6c\cdot\cos\frac{\pi}{3}$,

解得$c=1$ 或$c=2$.

当$c=1$ 时，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{\sqrt{7}}{14}<0$，故 B 为钝角，

这与已知$\triangle ABC$为锐角三角形相矛盾，故不满足条件；

当$c=2$ 时，$\triangle ABC$ 的面积为

$S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.(10 分)

【解析】(1)利用正弦定理，结合题意求出角 A 的值；
(2)由条件利用余弦定理求出 c 的值，再计算$\triangle ABC$ 的面积.
本题考查了正弦、余弦定理的应用问题，也考查了三角形面积的计算问题，是中档题.

14. 已知数列$\{a_n\}$是一个等差数列，且$a_2=-1$，$a_5=5$.
    (1)求$\{a_n\}$的通项a_n；
    (2)若$b_n=a_n+2^n$，求$\{b_n\}$前 n 项和S_n.

【答案】解：(1)等差数列$\{a_n\}$公差为 d，$a_5-a_2=3d=6$，即$d=2$.

$a_2=a_1+d=-1$，

解得：$a_1=-3$，

$\therefore a_n=a_1+2(n-1)=2n-5$，

数列$\{a_n\}$的通项a_n，$a_n=2n-5$；

(2)由$b_n=a_n+2^n=(2n-5)+2^n$，

则$\{b_n\}$前 n 项和S_n，$S_n=b_1+b_2+b_3+\dots+b_n$，

$=-3+2+(-1)+2^2+1+2^3+\dots+(2n-5)+2^n$，

$= [-3+(-1)+1+\ldots+(2n-5)]+2+2^2+2^3+\ldots+2^n$，

$= \frac{(-3+2n+5)n}{2}+\frac{2(1-2^n)}{1-2}$,

$= n^2-4n+2^{n+1}-2$，

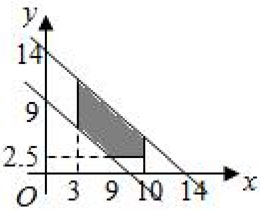
$\{b_n\}$前 n 项和S_n，$S_n = n^2-4n+2^{n+1}-2$.

【解析】(1)由$a_5-a_2=3d=6$，求得$d=2$，$a_2=a_1+d=-1$，$a_1=-3$，由等差数列通项公式则$a_n=2n-5$；

(2)$b_n=a_n+2^n=(2n-5)+2^n$，采用分组求和，根据等比数列及等差数列前 n 项和公式，即可求得$\{b_n\}$前 n 项和S_n.

本题考查等差数列的通项公式，等差数列及等比数列前 n 项和公式的求法，考查分组求和，考查计算能力，属于中档题.

15. 某人上午 7：00 乘汽车以v_1千米/小时$(30\le v_1\le 100)$匀速从 A 地出发到距 300 公里的 B 地，在 B 地不作停留，然后骑摩托车以v_2千米/小时$(4\le v_2\le 20)$匀速从 B 地出发到距 50 公里的 C 地，计划在当天 16：00 至 21：00 到达 C 地.设乘汽车、骑摩托车的时间分别是 x,y 小时，如果已知所需的经费$p=100+3(5-x)+2(8-y)$元，那么v_1，v_2分别是多少时走的最经济，此时花费多少元？



【答案】解：由题意得，$x=\frac{300}{v_1}$，$y=\frac{50}{v_2}$

$\because 30\le v_1\le 100$，$4\le v_2\le 20$

$$\therefore 3\le x\le 10, \frac{5}{2}\le y\le \frac{25}{2}$$

由题设中的限制条件得 $9\le x+y\le 14$

于是得约束条件$\begin{cases}9\le x+y\le 14\\3\le x\le 10\\\frac{5}{2}\le y\le \frac{25}{2}\end{cases}$

目标函数$p=100+3(5-x)+2(8-y)=131-3x-2y$(6 分)

做出可行域(如图)，

当$z=3x+2y$, 即$y=-\frac{3}{2}x+\frac{z}{2}$平行移动到过(10,4)点时纵截距最大，此时 p 最小.

所以当$x=10$，$y=4$，即$v_1=30$，$v_2=12.5$时，$p_{min}=93$元 (12 分)

(没有图扣 2 分)

【解析】先建立满足题意的约束条件及目标函数，作出满足条件的 x，y 的区域，利用几何意义可求目标函数的最小值

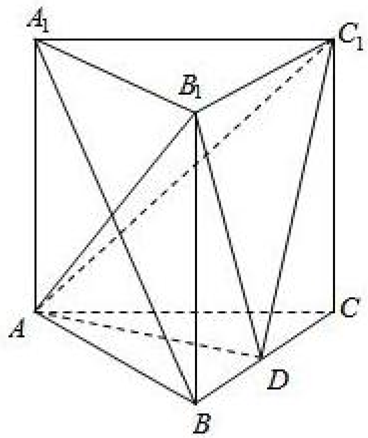
本题考查简单线性规划的应用，解题的关键是理解简单线性规划的意义及其原理，解题步骤，本题的难点是建立线性约束条件及确定线性目标函数，本题考查了数形结合的思想及转化的思想.

16. 如图，三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧棱$AA\perp$底面 ABC，且侧棱和底面边长均为 2，D 是 BC 的中点

(1)求证：$AD\perp$平面BB_1CC_1；

(2)求证：$A_1B//$平面ADC_1；

(3)求三棱锥C_1-ADB_1的体积.



【答案】(1)证明：$\because CC_1\perp$平面ABC，又$AD\subset$平面ABC，

$\therefore CC_1\perp AD$

$\because\triangle ABC$是正三角形，D 是 BC 的中点，

$\therefore BC\perp AD$，又$BC\cap CC_1=C$，

$\therefore AD\perp$平面BB_1CC_1；

(2)证明：如图，连接A_1C交AC_1于点 O，连接 OD

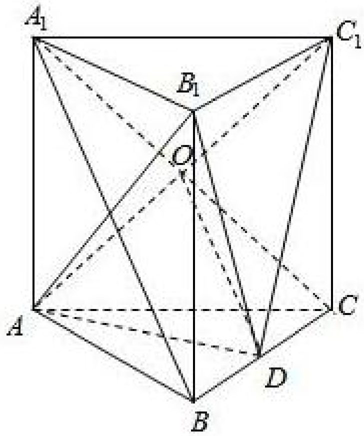
由题得四边形ACC_1A_1为矩形，O 为A_1C的中点，

又 D 为 BC 的中点，

$\therefore A_1B//OD$

$\because OD\subset$平面ADC_1，$A_1B\not\subset$平面ADC_1

$\therefore A_1B//$平面ADC_1.



(3)解：$\because V_{C_1-ADB_1}=V_{A-B_1DC_1}$，$S_{\triangle B_1DC_1}=\frac{1}{2}\times 2\times 2$，$AD=\sqrt{3}$，

$\therefore V_{C_1-ADB_1}=V_{A-B_1DC_1}=\frac{1}{3}S_{\triangle B_1DC_1}\times AD=\frac{1}{3}\times 2\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【解析】(1)利用线面垂直的判定与性质定理、等边三角形的性质即可证明；

(2)连接A_1C交AC_1于点 O，连接 OD，利用三角形的中位线定理与线面平行的判定定理即可得出；

(3)由于$V_{C_1-ADB_1}=V_{A-B_1DC_1}$，利用三棱锥的体积计算公式即可得出.

本题综合考查了线面垂直的判定与性质定理、等边三角形的性质、三角形的中位线定理与线面平行的判定定理、三棱锥的体积计算公式，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

17. 已知$a\in R$，函数$f(x)=\ln x-ax+1$.

(1)讨论函数$f(x)$的单调性；

(2)若函数$f(x)$有两个不同的零点x_1，$x_2(x_1<x_2)$，求实数 a 的取值范围；

(3)在(2)的条件下，求证：$x_1+x_2>2$.

【答案】(本小题满分 12 分)

解：(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，其导数$f'(x)=\frac{1}{x}-a$.

①当$a\le 0$时，$f'(x)>0$ 0'/>，函数在$(0,+\infty)$上是增函数；

②当$a>0$时，在区间$(0,\frac{1}{a})$上，$f'(x)>0$ 0'/>；在区间$(\frac{1}{a},+\infty)$上，$f'(x)<0$.

$\therefore f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$是增函数，在$(\frac{1}{a},+\infty)$是减函数. …(4 分)

(2)由(1)知，当$a\leq 0$时，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，不可能有两个零点，

当$a>0$时，$f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上是增函数，在$(\frac{1}{a},+\infty)$上是减函数，此时$f(\frac{1}{a})$为函数$f(x)$的最大值，

当$f(\frac{1}{a})\leq 0$时，$f(x)$最多有一个零点，

$\therefore f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}>0$，解得$0<a<1$，

此时，$\frac{1}{e}<\frac{1}{a}<\frac{e^2}{a^2}$，且$f(\frac{1}{e})=-1-\frac{a}{e}+1=-\frac{a}{e}<0$，

$f(\frac{e^2}{a^2})=2-2\ln a-\frac{e^2}{a}+1=3-2\ln a-\frac{e^2}{a}(0<a<1)$，

令$F(a)=3-2\ln a-\frac{e^2}{a}$，则$F'(x)=-\frac{2}{a}+\frac{e^2}{a^2}=\frac{e^2-2a}{a^2}>0$ 0'/>，$\therefore F(a)$在$(0,1)$上单调递增，

$\therefore F(a)<F(1)=3-e^2<0$，即$f(\frac{e^2}{a^2})<0$，

$\therefore a$的取值范围是$(0,1)$. …(8 分)

(3)由(2)可知函数$f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$是增函数，在$(\frac{1}{a},+\infty)$是减函数.

$\because 0<x_1<\frac{1}{a}$，$\therefore \frac{2}{a}-x_1>\frac{1}{a}$.只要证明：$f(\frac{2}{a}-x_1)>0$就可以得出结论.

下面给出证明：构造函数：$g(x)=f(\frac{2}{a}-x)-f(x)=\ln(\frac{2}{a}-x)-a(\frac{2}{a}-x)-(\ln x-ax)(0<x\leq\frac{1}{a})$，则$g'(x)=\frac{1}{x-\frac{2}{a}}-\frac{1}{x}+2a=\frac{2a(x-\frac{1}{a})^2}{x(x-\frac{2}{a})}<0$，

函数$g(x)$在区间$(0,\frac{1}{a}]$上为减函数.$0<x_1<\frac{1}{a}$，则$g(x_1)>g(\frac{1}{a})=0$，又$f(x_1)=0$，

于是$f(\frac{2}{a}-x_1)=\ln(\frac{2}{a}-x_1)-a(\frac{2}{a}-x_1)+1-f(x_1)=g(x_1)>0$.又$f(x_2)=0$，

由(1)可知$x_2>\frac{2}{a}-x_1$，即$x_1+x_2>\frac{2}{a}>2$. …(12 分)

【解析】(1)求出函数的定义域以及导数$f'(x)=\frac{1}{x}-a$.通过①当$a\leq 0$时，②当$a>0$时，判断导函数的符号，同除函数的单调性.

(2)由(1)知，当$a\leq 0$时，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数，不可能有两个零点，当$a>0$时，利用函数的最值判断$f(x)$最多有一个零点，$f(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}>0$，推出$0<a<1$，$f(\frac{e^2}{a^2})=2-2\ln a-\frac{e^2}{a}+1=3-2\ln a-\frac{e^2}{a}(0<a<1)$，令$F(a)=3-2\ln a-\frac{e^2}{a}$，则$F'(x)=-\frac{2}{a}+\frac{e^2}{a^2}=\frac{e^2-2a}{a^2}>0$ 0'/>利用函数的单调性，推出a的取值范围.

(3)由(2)可知函数$f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$是增函数，在$(\frac{1}{a},+\infty)$是减函数.只要证明：$f(\frac{2}{a}-x_1)>0$就可以得出结论.构造函数：$g(x)=f(\frac{2}{a}-x)-f(x)=\ln(\frac{2}{a}-x)-a(\frac{2}{a}-x)-(\ln x-ax)(0<x\le\frac{1}{a})$，求出$g'(x)$，利用函数的单调性转化求解即可.

本题考查函数的导数的综合应用，函数的单调性以及函数的零点个数的判断，函数的最值的应用，考查分析问题解决问题的能力.

18. 在直角坐标系 xOy 中，曲线C_1：$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$为参数，$t\neq0$)，其中 $0\le\alpha\le\pi$，在以 O 为极点，x 轴正半轴为极轴的极坐标系中，曲线C_2:$\rho=2\sin\theta$,C_3:$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$.

(1)求C_2与C_3交点的直角坐标；

(2)若C_1与C_2相交于点 A，C_1与C_3相交于点 B，求$|AB|$的最大值.

【答案】解：(I)由曲线C_2：$\rho=2\sin\theta$，化为$\rho^2=2\rho\sin\theta$，

$\therefore x^2+y^2=2y$.

同理由C_3：$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$.可得直角坐标方程：$x^2+y^2=2\sqrt{3}x$，

联立$\begin{cases}x^2+y^2-2y=0\\x^2+y^2-2\sqrt{3}x=0\end{cases}$,

解得$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\y=\frac{3}{2}\end{cases}$,

$\therefore$ C_2与C_3交点的直角坐标为$(0,0)$，$(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$.

(2)曲线C_1：$\begin{cases}x=t\cos\alpha\\y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$为参数，$t\neq0$)，化为普通方程：$y=x\tan\alpha$，其中 $0\le\alpha\le\pi$，$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$；$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，为$x=0(y\neq0)$.其极坐标方程为：$\theta=\alpha(\rho\in R,\rho\neq0)$，

$\because A$，B 都在C_1上，

$\therefore A(2\sin\alpha,\alpha)$，$B(2\sqrt{3}\cos\alpha,\alpha)$.

$\therefore|AB|=|2\sin\alpha-2\sqrt{3}\cos\alpha|=4|\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})|$,

当$\alpha=\frac{5\pi}{6}$时，$|AB|$取得最大值 4.

【解析】(I)由曲线C_2：$\rho=2\sin\theta$，化为$\rho^2=2\rho\sin\theta$，把$\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$代入可得直角坐标方程.同理由$C_3$:$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$.可得直角坐标方程,联立解出可得$C_2$与$C_3$交点的直角坐标.

(2)由曲线C_1的参数方程,消去参数 t,化为普通方程:$y=x\tan\alpha$,其中 $0\le\alpha\le\pi$,$\alpha\neq\frac{\pi}{2}$;$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，为$x=0(y\neq0)$.其极坐标方程为：$\theta=\alpha(\rho\in R,\rho\neq0)$，利用$|AB|=|2\sin\alpha-2\sqrt{3}\cos\alpha|$即可得出.

本题考查了极坐标方程化为直角坐标方程、参数方程化为普通方程、曲线的交点、两点之间的距离公式、三角函数的单调性，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.