2012江苏高考数学试卷答案与解析

一. 填空题：

1．已知集合 $A=\{1, 2, 4\}$，$B=\{2, 4, 6\}$，则 $A\cup B=$__▲__.

【答案】 $\{1,2,4,6\}$

【解析】根据集合的并集运算，两个集合的并集就是所有属于集合 A 和集合 B 的元素组成的集合，从所给的两个集合的元素可知，它们的元素是1，2，4，6，所以答案为$\{1,2,4,6\}$.

【点评】本题重点考查集合的运算.容易出错的地方是审错题目，把并集运算看成交集运算.属于基本题，难度系数较小.

2. 某学校高一、高二、高三年级的学生人数之比为$3:3:4$，现用分层抽样的方法从该校高中三个年级的学生中抽取容量为 50 的样本，则应从高二年级抽取__▲__名学生.

【答案】15

【解析】根据分层抽样的方法步骤，按照一定比例抽取，样本容量为50，那么根据题意得：从高三一共可以抽取人数为：$50\times\frac{3}{10}=15$人，答案 15 .

【点评】本题主要考查统计部分知识：抽样方法问题，分层抽样的具体实施步骤.分层抽样也叫做“按比例抽样”，也就是说，要根据每一层的个体数的多少抽取，这样才能够保证样本的科学性与普遍性，这样得到的数据才更有价值、才能够较精确地反映总体水平，本题属于容易题，也是高考热点问题，希望引起重视.

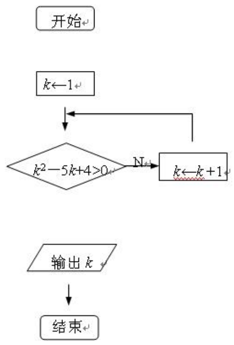
3. 设$a, b\in\mathbf{R}$，$a+b\mathrm{i}=\frac{11-7\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$（i 为虚数单位），则$a+b$的值为__▲__.

【答案】8

【解析】据题$a+bi=\frac{11-7i}{1-2i}=\frac{(11-7i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{25+15i}{5}=5+3i$，所以 $a=5,b=3,$ 从而 $a+b=8$.

【点评】本题主要考查复数的基本运算和复数相等的条件运用，属于基本题，一定要注意审题，对于复数的除法运算，要切实掌握其运算技巧和常规思路，再者，需要注意分母实数化的实质.

4. 右图是一个算法流程图，则输出的 k 的值是__▲__.



（第 4 题）

【答案】5

【解析】根据循环结构的流程图，当 $k=1$ 时，此时 $k^2-5k+4=0$；不满足条件，继续执行循环体，当 $k=2$ 时，$k^2-5k+4=-6$；不满足条件，继续执行循环，当 $k=3$ 时，$k^2-5k+4=-2$ 不满足条件，然后依次出现同样的结果，当 $k=5$ 时，此时 $k^2-5k+4=4$，此时满足条件跳出循环，输出 k 的值为 5.

【点评】本题主要考查算法的定义、流程图及其构成，考查循环结构的流程图. 注意循环条件的设置，以及循环体的构成，特别是注意最后一次循环的 k 的值. 这是新课标的新增内容，也是近几年的常考题目，要准确理解循环结构流程图的执行过程.

5. 函数 $f(x)=\sqrt{1-2\log_6 x}$ 的定义域为__▲__.

【答案】$\left(0,\sqrt{6}\right]$

【解析】根据题意得到 $1-2\log_6 x\geq 0$，同时，$x>0$，解得 $\log_6 x\leq\frac{1}{2}$，解得 $x\leq\sqrt{6}$，又 $x>0$，所以函数的定义域为：$\left(0,\sqrt{6}\right]$.

【点评】本题主要考查函数基本性质、对数函数的单调性和图象的运用. 本题容易忽略 $x>0$ 这个条件，因此，要切实对基本初等函数的图象与性质有清晰的认识，在复习中应引起高度重视. 本题属于基本题，难度适中.

6. 现有 10 个数，它们能构成一个以 1 为首项，-3 为公比的等比数列，若从这 10 个数中随机抽取一个数，则它小于 8 的概率是__▲__.

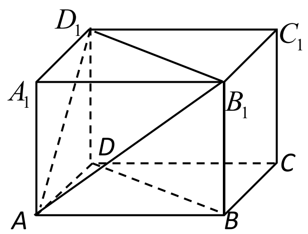
【答案】$\frac{3}{5}$

【解析】组成满足条件的数列为：$1,-3,9.-27,81,-243,729,-2187,6561,-19683$. 从中随机取

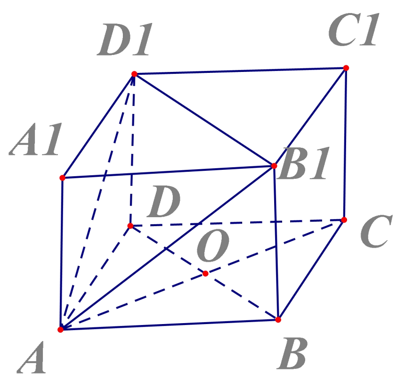
出一个数共有取法10种，其中小于8的取法共有6种，因此取出的这个数小于8的概率为$\frac{3}{5}$.

【点评】本题主要考查古典概型. 在利用古典概型解决问题时，关键弄清基本事件数和基本事件总数，本题要注意审题，“一次随机取两个数”，意味着这两个数不能重复，这一点要特别注意.

7．如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AD=3\text{cm}$，$AA_1=2\text{cm}$，则四棱锥$A-BB_1D_1D$的体积为________cm^3.



【答案】6cm^3



【解析】如图所示，连结AC交BD于点O，因为 平面$ABCD\perp BB_1D_1D$，又因为$AC\perp BD$，所以，$AC\perp$平面BB_1D_1D，所以四棱锥$A-BB_1D_1D$的高为AO，根据题意$AB=AD=3\text{cm}$，所以$AO=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，又因为$BD=3\sqrt{2}\text{cm}$，$AA_1=2\text{cm}$，故矩形BB_1D_1D的面积为$6\sqrt{2}\text{cm}^2$，从而四棱锥$A-BB_1D_1D$的体积$V=\frac{1}{3}\times 6\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=6\text{cm}^3$.

【点评】本题重点考查空间几何体的体积公式的运用. 本题综合性较强，结合空间中点线面的位置关系、平面与平面垂直的性质定理考查. 重点找到四棱锥$A-BB_1D_1D$的高为AO，这是

解决该类问题的关键. 在复习中，要对空间几何体的表面积和体积公式记准、记牢，并且会灵活运用. 本题属于中档题，难度适中.

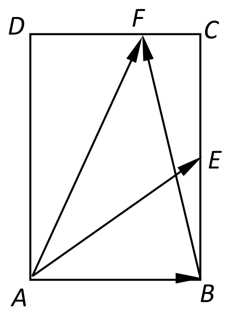
8. 在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{m^2+4}=1$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，则 m 的值为__▲__.

【答案】2

【解析】根据题目条件双曲线的焦点位置在 x 轴上（否则不成立），因此 $m>0$，由离心率公式得到 $\frac{m+m^2+4}{m}=5$，解得 $m=2$.

【点评】本题考查双曲线的概念、标准方程和简单的几何性质. 这是大纲中明确要求的，在对本部分复习时要注意：侧重于基本关系和基本理论性质的考查，从近几年的高考命题趋势看，几乎年年都有所涉及，要引起足够的重视. 本题属于中档题，难度适中.

9. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，点 E 为 BC 的中点，点 F 在边 CD 上，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$ 的值是__▲__.



【答案】$\sqrt{2}$

【解析】根据题意 $\vec{AF}=\vec{BC}+\vec{DF}$，所以

$$\vec{AB}\bullet\vec{AF}=\vec{AB}\bullet(\vec{BC}+\vec{DF})=\vec{AB}\bullet\vec{BC}+\vec{AB}\bullet\vec{DF}=\vec{AB}\bullet\vec{DF}=\left|\vec{AB}\right|\cdot\left|\vec{DF}\right|\cos 0^\circ=\sqrt{2}\left|\vec{DF}\right|=\sqrt{2},$$

从而得到 $\left|\vec{DF}\right|=1$，又因为 $\vec{AE}=\vec{AD}+\vec{DF},\vec{BF}=\vec{BC}+\vec{CF}$，所以

$$\vec{AE}\bullet\vec{BF}=(\vec{AD}+\vec{DF})\bullet(\vec{BC}+\vec{CF})=\left|\vec{BC}\right|^2+0+0+\left|\vec{DF}\right|\cdot\left|\vec{CF}\right|\cos 180^\circ=\sqrt{2}.$$

【点评】本题主要考查平面向量的基本运算，同时，结合平面向量的数量积运算解决．设法

找到$\left|\overrightarrow{DF}\right|=1$，这是本题的解题关键，本题属于中等偏难题目.

10. 设$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上且周期为2的函数，在区间$[-1,1]$上，$f(x)=\begin{cases} ax+1, & -1\leqslant x<0, \\ \dfrac{bx+2}{x+1}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$

其中$a,b\in\mathbf{R}$. 若$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$，则$a+3b$的值为__▲__.

【答案】-10 .

【解析】因为$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}\right)$，函数$f(x)$的周期为2，所以

$f(\dfrac{1}{2})=f(\dfrac{3}{2}-2)=f(-\dfrac{1}{2})$，根据$f(x)=\begin{cases} ax+1, & -1\leqslant x<0, \\ \dfrac{bx+2}{x+1}, & 0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$ 得到$3a+2b=-2$，

又$f(1)=f(-1)$，得到$-a+1=\dfrac{b+2}{2}$,即$2a+b=0$，结合上面的式子解得$a=2,b=-4$，所以$a+3b=-10$.

【点评】本题重点考查函数的性质、分段函数的理解和函数周期性的应用. 利用函数的周期性将式子化简为$f(\dfrac{1}{2})=f(\dfrac{3}{2}-2)=f(-\dfrac{1}{2})$然后借助于分段函数的解析式解决. 属于中档题，难度适中.

11. 设α为锐角，若$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$，则$\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{12})$的值为__▲__.

【答案】$\dfrac{17\sqrt{2}}{50}$

【解析】根据$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{4}{5}$，$\cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{3})=2\cos^2(\alpha+\dfrac{\pi}{6})-1=2\times\dfrac{16}{25}-1=\dfrac{7}{25}$，

因为$\cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{3})\succ 0$，所以$\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{1-\left(\dfrac{7}{25}\right)^2}=\dfrac{24}{25}$，因为

$\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{12})=\sin[(2\alpha+\dfrac{\pi}{3})-\dfrac{\pi}{4}]=\sin(2\alpha+\dfrac{\pi}{3})\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos(2\alpha+\dfrac{\pi}{3})\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{17\sqrt{2}}{50}$.

【点评】本题重点考查两角和与差的三角公式、角的灵活拆分、二倍角公式的运用. 在求解三角函数值时，要注意角的取值情况，切勿出现增根情况. 本题属于中档题，运算量较大，难度

稍高.

12. 在平面直角坐标系xOy中，圆C的方程为$x^2+y^2-8x+15=0$，若直线$y=kx-2$上至少存在一点，使得以该点为圆心，1为半径的圆与圆C有公共点，则k的最大值是___▲___.

【答案】$\frac{4}{3}$

【解析】根据题意$x^2+y^2-8x+15=0$将此化成标准形式为：$(x-4)^2+y^2=1$，得到，该圆的圆心为M $(4,0)$半径为1，若直线$y=kx-2$上至少存在一点，使得以该点为圆心，1为半径的圆与圆C有公共点，只需要圆心M $(4,0)$到直线$y=kx-2$的距离$d\le 1+1$，即可，所以有$d=\frac{|4k-2|}{\sqrt{k^2+1}}\le 2$，化简得$k(3k-4)\le 0$解得$0\le k\le\frac{4}{3}$，所以$k$的最大值是$\frac{4}{3}$.

【点评】本题主要考查直线与圆的位置关系、点到直线的距离公式、圆的一般式方程和标准方程的互化，考查知识较综合，考查转化思想在求解参数范围中的运用. 本题的解题关键就是对若直线$y=kx-2$上至少存在一点，使得以该点为圆心，1为半径的圆与圆C有公共点，这句话的理解，只需要圆心M $(4,0)$到直线$y=kx-2$的距离$d\le 1+1$即可，从而将问题得以转化. 本题属于中档题，难度适中.

13. 已知函数$f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$的值域为$[0,+\infty)$，若关于x的不等式$f(x)<c$的解集为$(m,m+6)$，则实数$c$的值为___▲___.

【答案】9

【解析】根据函数$f(x)=x^2+ax+b\ge 0$，得到$a^2-4b=0$，又因为关于x的不等式$f(x)<c$，可化为：$x^2+ax+b-c<0$，它的解集为$(m,m+6)$，设函数$f(x)=x^2+ax+b-c$图象与x轴的交点的横坐标分别为x_1,x_2，则$|x_2-x_1|=m+6-m=6$，从而，$(x_2-x_1)^2=36$，即$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=36$，又因为$x_1x_2=b-c,x_1+x_2=-a$，代入得到$c=9$.

【点评】本题重点考查二次函数、一元二次不等式和一元二次方程的关系，根与系数的关系. 二次函数的图象与二次不等式的解集的对应关系要理清. 属于中档题，难度不大.

14. 已知正数a，b，c满足：$5c-3a\leqslant b\leqslant 4c-a$，$c\ln b\geqslant a+c\ln c$，则$\frac{b}{a}$的取值范围是___▲___.

【答案】$[e,7]$

【解析】根据条件 $5c-3a\leqslant b\leqslant 4c-a$，$c\ln b\geqslant a+c\ln c$，$a\le c(\ln b-\ln c)=c\ln\frac{b}{c}$，得到

$\ln\frac{b}{c}\ge\frac{a}{c},\frac{b}{c}\ge e^{\frac{a}{c}}>1$，得到 $c<b$. 又因为 $5c-3a\le b$，所以 $c<\frac{3a+b}{5}$，由已知 $b\le 4c-a$，

得到 $c>\frac{a+b}{4}$. 从而 $\frac{a+b}{4}\le b$，解得 $\frac{b}{a}\ge\frac{1}{3}$.

【点评】本题主要考查不等式的基本性质、对数的基本运算. 关键是注意不等式的等价变形，做到每一步都要等价. 本题属于中高档题，难度较大.

二、解答题

15. （本小题满分 14 分）

在 ΔABC 中，已知 $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}$.

（1）求证：$\tan B=3\tan A$；

（2）若 $\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$，求 A 的值.

【答案及解析】

. 本小题主要考查平面向量的数量积、三角函数的基本关系式、两角和的正切公式、解三角形，考查运算求解能力和推理论证能力. 满分 14 分.

解：(1) 因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$，所以 $AB\cdot AC\cdot\cos A=3BA\cdot BC\cdot\cos B$，

即 $AC\cdot\cos A=3BC\cdot\cos B$，由正弦定理知 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$，

从而 $\sin B\cos A=3\sin A\cos B$，

又因为 $0<A+B<\pi$，所以 $\cos A>0$，$\cos B>0$，

所以 $\tan B=3\tan A$.

(2) 因为 $\cos C=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$0<C<\pi$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

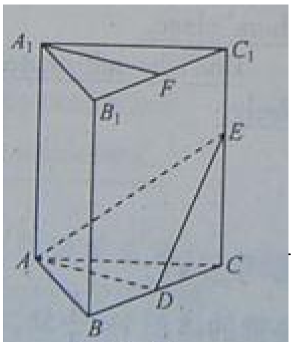
从而 $\tan C=2$，于是 $\tan[\pi-(A+B)]=2$，即 $\tan(A+B)=-2$，

亦即 $\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-2$，由(1)得 $\frac{4\tan A}{1-3\tan^2 A}=-2$，解得 $\tan A=1$ 或 $-\frac{1}{3}$，

因为 $\cos A>0$，故 $\tan A=1$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$.

【点评】本题主要考查向量的数量积的定义与数量积运算、两角和与差的三角公式、三角恒等变形以及向量共线成立的条件. 本题综合性较强，转化思想在解题中灵活运用，注意两角和与差的三角公式的运用，考查分析问题和解决问题的能力，从今年的高考命题趋势看，几乎年年都命制该类型的试题，因此平时练习时加强该题型的训练. 本题属于中档题，难度适中.

16. （本小题满分 14 分）



(第 16 题)

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1B_1=A_1C_1$，D，E 分别是棱 BC，CC_1 上的点（点 D 不同于点 C），且 $AD\perp DE$，F 为 B_1C_1 的中点.

求证：（1）平面 $ADE\perp$ 平面 BCC_1B_1；

（2）直线 A_1F // 平面 ADE.

【答案及解析】

16. **本小题主要考查直线与平面、平面与平面的位置关系，考查空间想象能力和推理论证能力.满分 14 分.**

证明：(1) 因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，所以 $CC_1\perp$ 平面 ABC，

又 $AD\subset$ 平面 ABC，所以 $CC_1\perp AD$.

又因为 $AD\perp DE$，CC_1，$DE\subset$ 平面 BCC_1B_1，$CC_1\cap DE=E$，

所以 $AD\perp$ 平面 BCC_1B_1. 又 $AD\subset$ 平面 ADE，

所以平面 $ADE\perp$ 平面 BCC_1B_1.

(2) 因为 $A_1B_1=A_1C_1$，F 为 B_1C_1 的中点，所以 $A_1F\perp B_1C_1$.

因为 $CC_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，且 $A_1F\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，

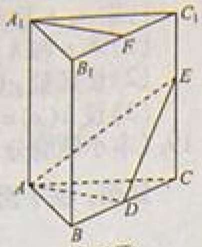
所以 $CC_1\perp A_1F$.

又因为 CC_1，$B_1C_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，$CC_1\cap B_1C_1=C_1$，

所以 $A_1F\perp$ 平面 BCC_1B_1.

由(1)知 $AD\perp$ 平面 BCC_1B_1，所以 $A_1F/\!/AD$.

又 $AD\subset$ 平面 ADE，$A_1F\not\subset$ 平面 ADE，所以 $A_1F/\!/$ 平面 ADE.



(第 16 题)

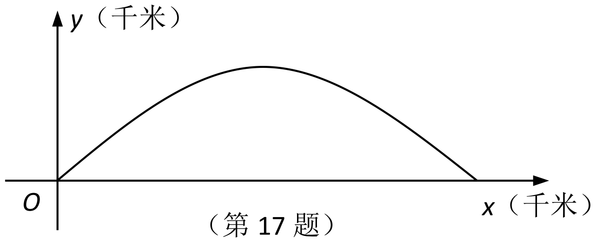
【点评】本题主要考查空间中点、线、面的位置关系，考查线面垂直、面面垂直的性质与判定，线面平行的判定. 解题过程中注意中点这一条件的应用，做题规律就是“无中点、取中点，相连得到中位线”. 本题属于中档题，难度不大，考查基础为主，注意问题的等价转化.

17. （本小题满分 14 分）

如图，建立平面直角坐标系 xOy，x 轴在地平面上，y 轴垂直于地平面，单位长度为 1 千米. 某炮位于坐标原点. 已知炮弹发射后的轨迹在方程 $y=kx-\frac{1}{20}(1+k^2)x^2(k>0)$ 表示的曲线上，其中 k 与发射方向有关. 炮的射程是指炮弹落地点的横坐标.

（1）求炮的最大射程；

（2）设在第一象限有一飞行物（忽略其大小），其飞行高度为 3.2 千米，试问它的横坐标 a 不超过多少时，炮弹可以击中它？请说明理由.



（第 17 题）

【答案及解析】

17. 本小题主要考查函数、方程和基本不等式等基础知识，考查数学阅读能力和解决实际问题的能力. 满分 14 分.

解：(1) 令 $y=0$，得 $kx-\frac{1}{20}(1+k^2)x^2=0$，由实际意义和题设条件知 $x>0$，$k>0$，

故 $x=\frac{20k}{1+k^2}=\frac{20}{k+\frac{1}{k}}\leqslant\frac{20}{2}=10$，当且仅当 $k=1$ 时取等号.

所以炮的最大射程为 10 千米.

(2) 因为 $a>0$，所以

炮弹可击中目标 $\Leftrightarrow$ 存在 $k>0$，使 $3.2=ka-\frac{1}{20}(1+k^2)a^2$ 成立

$\Leftrightarrow$ 关于 k 的方程 $a^2k^2-20ak+a^2+64=0$ 有正根

$\Leftrightarrow$ 判别式 $\Delta=(-20a)^2-4a^2(a^2+64)\geqslant 0$

$\Leftrightarrow a\leqslant 6$.

所以当 a 不超过 6（千米）时，可击中目标.

【点评】本题主要考查二次函数的图象与性质以及求解函数最值问题. 在利用导数求解函数的最值问题时，要注意增根的取舍，通过平面几何图形考查函数问题时，首先审清题目，然后建立数学模型，接着求解数学模型，最后，还原为实际问题. 本题属于中档题，难度适中.

18.（本小题满分 16 分）

已知 a，b 是实数，1 和 -1 是函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 的两个极值点.

（1）求 a 和 b 的值；

（2）设函数 $g(x)$ 的导函数 $g'(x)=f(x)+2$，求 $g(x)$ 的极值点；

（3）设 $h(x)=f(f(x))-c$，其中 $c\in[-2，2]$，求函数 $y=h(x)$ 的零点个数.

【答案及解析】

本小题主要考查函数的概念、性质及导数等基础知识，考查运算求解能力、运用数形结合、分类讨论的思想方法分析与解决问题的能力. 满分 16 分.

解：(1) 由题设知 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，且 $f'(-1)=3-2a+b=0$，$f'(1)=3+2a+b=0$，

解得 $a=0$，$b=-3$.

(2) 由 (1) 知 $f(x)=x^3-3x$. 因为 $f(x)+2=(x-1)^2(x+2)$，所以 $g'(x)=0$ 的根为 $x_1=x_2=1$，$x_3=-2$，于是函数 $g(x)$ 的极值点只可能是 1 或 -2.

当 $x<-2$ 时，$g'(x)<0$；当 $-2<x<1$ 时，$g'(x)>0$，故 -2 是 $g(x)$ 的极值点.

当 $-2<x<1$ 或 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，故 1 不是 $g(x)$ 的极值点.

所以 $g(x)$ 的极值点为 -2.

(3) 令 $f(x)=t$，则 $h(x)=f(t)-c$. 先讨论关于 x 的方程 $f(x)=d$ 根的情况，$d\in[-2,2]$.

当 $|d|=2$ 时，由(2)可知，$f(x)=-2$ 的两个不同的根为 1 和 -2，注意到 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)=2$ 的两个不同的根为 -1 和 2.

当 $|d|<2$ 时，因为 $f(-1)-d=f(2)-d=2-d>0$，$f(1)-d=f(-2)-d=-2-d<0$，所以 -2，-1，1，2 都不是 $f(x)=d$ 的根. 由(1)知 $f'(x)=3(x+1)(x-1)$.

①当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，于是 $f(x)$ 是单调增函数，从而 $f(x)>f(2)=2$，此时 $f(x)=d$ 无实根. 同理，$f(x)=d$ 在 $(-\infty,-2)$ 上无实根.

②当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)>0$，于是 $f(x)$ 是单调增函数，又 $f(1)-d<0$，$f(2)-d>0$，$y=f(x)-d$ 的图象不间断，所以 $f(x)=d$ 在 $(1,2)$ 内有唯一实根. 同理，$f(x)=d$ 在 $(-2,-1)$ 内有唯一实根.

③当 $x\in(-1,1)$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 是单调减函数，又 $f(-1)-d>0$，$f(1)-d<0$，$y=f(x)-d$ 的图象不间断，所以 $f(x)=d$ 在 $(-1,1)$ 内有唯一实根.

由上可知：当 $|d|=2$ 时，$f(x)=d$ 有两个不同的根 x_1，x_2 满足 $|x_1|=1$，$|x_2|=2$；当 $|d|<2$ 时，$f(x)=d$ 有三个不同的根 x_3，x_4，x_5 满足 $|x_i|<2$，$i=3,4,5$.

现考虑函数 $y=h(x)$ 的零点.

(i) 当 $|c|=2$ 时，$f(t)=c$ 有两个根 t_1，t_2 满足 $|t_1|=1$，$|t_2|=2$，而 $f(x)=t_1$ 有三个不同的根，$f(x)=t_2$ 有两个不同的根，故 $y=h(x)$ 有 5 个零点.

(ii) 当 $|c|<2$ 时，$f(t)=c$ 有三个不同的根 t_3，t_4，t_5 满足 $|t_i|<2$，$i=3,4,5$，而 $f(x)=t_i\,(i=3,4,5)$ 有三个不同的根，故 $y=h(x)$ 有 9 个零点.

综上可知，当 $|c|=2$ 时，函数 $y=h(x)$ 有 5 个零点；当 $|c|<2$ 时，函数 $y=h(x)$ 有 9 个零点.

【点评】本题综合考查导数的定义、计算及其在求解函数极值和最值中的运用. 考查较全面系统，要注意变形的等价性和函数零点的认识、极值和极值点的理解. 本题主要考查数形结合思想和分类讨论思想，属于中高档试题，难度中等偏上，考查知识比较综合，全方位考查分析问题和解决问题的能力，运算量比较大.

19. （本小题满分 16 分）

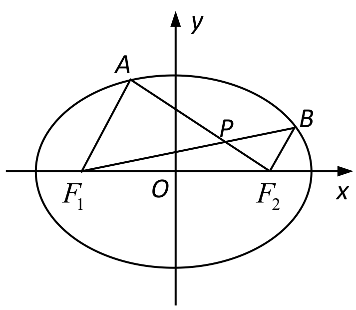
如图，在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$. 已知 $(1,e)$ 和 $\left(e,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 都在椭圆上，其中 e 为椭圆的离心率.

（1）求椭圆的离心率；

（2）设 A，B 是椭圆上位于 x 轴上方的两点，且直线 AF_1 与直线 BF_2 平行，AF_2 与 BF_1 交于点 P.

（i）若 $AF_1-BF_2=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，求直线 AF_1 的斜率；

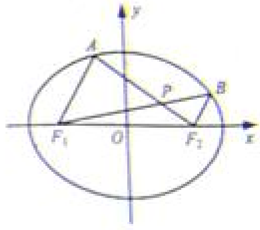
（ii）求证：PF_1+PF_2 是定值.



（第 19 题）

【答案及解析】

本小题主要考查椭圆的定义、标准方程及几何性质、直线方程、两点间的距离公式等基础知识，考查运算求解能力和推理论证能力. 满分 16 分.



(第 19 题)

解：(1) 由题设知 $a^2=b^2+c^2$，$e=\frac{c}{a}$. 由点 $(1,e)$ 在椭圆上，

得 $\frac{1}{a^2}+\frac{c^2}{a^2b^2}=1$，解得 $b^2=1$，于是 $c^2=a^2-1$，

又点 $\left(e,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在椭圆上，所以 $\frac{e^2}{a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$，即

$\frac{a^2-1}{a^4}+\frac{3}{4}=1$，解得 $a^2=2$.

因此，所求椭圆的方程是 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(2) 由 (1) 知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，又直线 AF_1 与 BF_2 平行，所以可设直线 AF_1 的方程为 $x+1=my$，直线 BF_2 的方程为 $x-1=my$. 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$y_1>0$，$y_2>0$.

由 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{2}+y_1^2=1\\ x_1+1=my_1\end{cases}$，得 $(m^2+2)y_1^2-2my_1-1=0$，解得 $y_1=\frac{m+\sqrt{2m^2+2}}{m^2+2}$，

故 $AF_1=\sqrt{(x_1+1)^2+(y_1-0)^2}=\sqrt{(my_1)^2+y_1^2}=\frac{\sqrt{2}(m^2+1)+m\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$. ①

同理，$BF_2=\frac{\sqrt{2}(m^2+1)-m\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$. ②

(i) 由①②得 $AF_1-BF_2=\frac{2m\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$，解 $\frac{2m\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 得 $m^2=2$，注意到 $m>0$，

故 $m=\sqrt{2}$. 所以直线 AF_1 的斜率为 $\frac{1}{m}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(ii) 因为直线 AF_1 与 BF_2 平行，所以 $\frac{PB}{PF_1}=\frac{BF_2}{AF_1}$，于是 $\frac{PB+PF_1}{PF_1}=\frac{BF_2+AF_1}{AF_1}$，

故 $PF_1=\frac{AF_1}{AF_1+BF_2}BF_1$. 由 B 点在椭圆上知 $BF_1+BF_2=2\sqrt{2}$，

从而 $PF_1=\frac{AF_1}{AF_1+BF_2}(2\sqrt{2}-BF_2)$. 同理 $PF_2=\frac{BF_2}{AF_1+BF_2}(2\sqrt{2}-AF_1)$.

因此，$PF_1+PF_2=\frac{AF_1}{AF_1+BF_2}(2\sqrt{2}-BF_2)+\frac{BF_2}{AF_1+BF_2}(2\sqrt{2}-AF_1)$

$=2\sqrt{2}-\frac{2AF_1\cdot BF_2}{AF_1+BF_2}$.

又由①②知 $AF_1+BF_2=\frac{2\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}$，$AF_1\cdot BF_2=\frac{m^2+1}{m^2+2}$，

所以 $PF_1+PF_2=2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 因此，$PF_1+PF_2$ 是定值.

【点评】本题主要考查椭圆的定义、几何性质以及直线与椭圆的关系．本题注意解题中，待定系数法在求解椭圆的标准方程应用，曲线和方程的关系. 在利用条件 $AF_1-BF_2=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 时，

需要注意直线 AF_1 和直线 BF_2 平行这个条件. 本题属于中档题.

20. （本小题满分 16 分）

已知各项均为正数的两个数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足：$a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}}}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

（1）设 $b_{n+1}=1+\dfrac{b_n}{a_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，求证：数列 $\left\{\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^2\right\}$ 是等差数列；

（2）设 $b_{n+1}=\sqrt{2}\cdot\dfrac{b_n}{a_n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $\{a_n\}$ 是等比数列，求 a_1 和 b_1 的值.

【答案与解析】

本小题主要考查等差数列和等比数列的基本性质、基本不等式等基础知识，考查考生分析探究及逻辑推理的能力. 满分 16 分.

解：(1) 由题设知 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}}}=\dfrac{1+\dfrac{b_n}{a_n}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^2}}=\dfrac{b_{n+1}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^2}}$，

所以 $\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}=\sqrt{1+\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^2}$，从而 $\left(\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^2-\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^2=1\ (n\in\mathbf{N}^*)$，

所以数列 $\left\{\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^2\right\}$ 是以 1 为公差的等差数列.

(2) 因为 $a_n>0$，$b_n>0$，所以 $\dfrac{(a_n+b_n)^2}{2}\leqslant a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}<(a_n+b_n)^2$，

从而 $1<a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{\sqrt{a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}}}\leqslant\sqrt{2}$.　　　　(*)

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 $a_n>0$ 知 $q>0$. 下证 $q=1$.

若 $q>1$，则 $a_1=\dfrac{a_2}{q}<a_2\leqslant\sqrt{2}$，故当 $n>\log_q\dfrac{\sqrt{2}}{a_1}$ 时，$a_{n+1}=a_1q^n>\sqrt{2}$，与 (*) 矛盾；

若 $0<q<1$，则 $a_1=\dfrac{a_2}{q}>a_2>1$，故当 $n>\log_q\dfrac{1}{a_1}$ 时，$a_{n+1}=a_1q^n<1$，与 (*) 矛盾.

综上，$q=1$，故 $a_n=a_1\ (n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $1<a_1\leqslant\sqrt{2}$.

又 $b_{n+1}=\sqrt{2}\cdot\dfrac{b_n}{a_n}=\dfrac{\sqrt{2}}{a_1}\cdot b_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $\{b_n\}$ 是公比为 $\dfrac{\sqrt{2}}{a_1}$ 的等比数列. 若 $a_1\neq\sqrt{2}$，

则 $\dfrac{\sqrt{2}}{a_1}>1$，于是 $b_1<b_2<b_3$. 又由 $a_1=\dfrac{a_1+b_n}{\sqrt{a_1^{\ 2}+b_n^{\ 2}}}$ 得 $b_n=\dfrac{a_1\pm a_1^{\ 2}\sqrt{2-a_1^{\ 2}}}{a_1^{\ 2}-1}$，所以 b_1，b_2，b_3 中至少有两项相同，矛盾. 所以 $a_1=\sqrt{2}$，从而 $b_n=\dfrac{a_1\pm a_1^{\ 2}\sqrt{2-a_1^{\ 2}}}{a_1^{\ 2}-1}=\sqrt{2}$.

所以 $a_1=b_1=\sqrt{2}$.

【点评】本题综合考查等差数列的定义、等比数列的有关知识的灵活运用、指数幂和根式的互化. 数列通项公式的求解. 注意利用等差数列的定义证明问题时一般思路和基本方法，本题是有关数列的综合题；从近几年的高考命题趋势看，数列问题仍是高考的热点 、重点问题，

在训练时，要引起足够的重视.

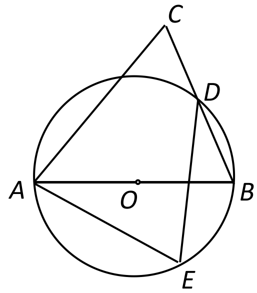
数学Ⅱ(附加题)

21．[选做题]本题包括 A、B、C、D 四小题，请选定其中两题，并在相应的答题区域内作答．若多做，则按作答的前两题评分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

A．[选修 4 － 1：几何证明选讲]（本小题满分 10 分）

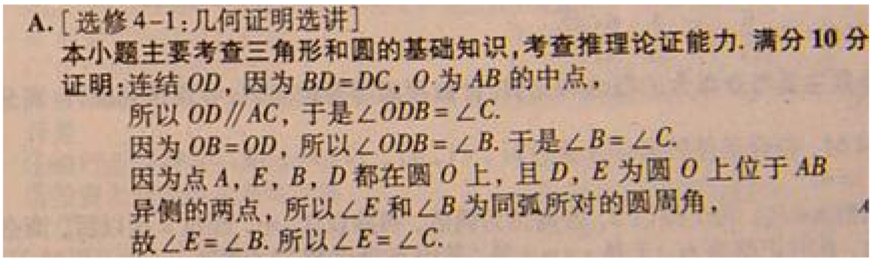
如图，AB 是圆 O 的直径，D，E 为圆上位于 AB 异侧的两点，连结 BD 并延长至点 C，使 $BD=DC$，连结 AC，AE，DE.

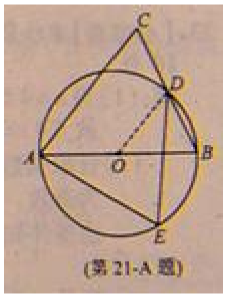
求证：$\angle E=\angle C$．



（第 21-A 题）

【答案与解析】


A. [选修4－1:几何证明选讲]
本小题主要考查三角形和圆的基础知识,考查推理论证能力. 满分 10 分.
证明:连结 OD，因为 $BD=DC$，O 为 AB 的中点，
所以 $OD/\!/AC$，于是 $\angle ODB=\angle C$.
因为 $OB=OD$，所以 $\angle ODB=\angle B$. 于是 $\angle B=\angle C$.
因为点 A，E，B，D 都在圆 O 上，且 D，E 为圆 O 上位于 AB 异侧的两点，所以 $\angle E$ 和 $\angle B$ 为同弧所对的圆周角，
故 $\angle E=\angle B$. 所以 $\angle E=\angle C$.



【点评】本题主要考查圆的基本性质，等弧所对的圆周角相等，同时结合三角形的基本性质考查．本题属于选讲部分，涉及到圆的性质的运用，考查的主要思想方法为等量代换法，属于中低档题，难度较小，从这几年的选讲部分命题趋势看，考查圆的基本性质的题目居多，在练习时，要有所侧重．

B．[选修 4 － 2：矩阵与变换]（本小题满分 10 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值．

【答案与解析】

本小题主要考查矩阵的基础知识，考查运算求解能力. 满分 10 分.

解：因为 $A^{-1}A=E$，所以 $A=(A^{-1})^{-1}$.

因为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，所以 $A=(A^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，

于是矩阵 A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -3\\ -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda-4$.

令 $f(\lambda)=0$，解得 A 的特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=4$.

【点评】本题主要考查矩阵的构成、矩阵的基本运算以及逆矩阵的求解、矩阵的特征多项式与特征值求解．在求解矩阵的逆矩阵时，首先分清求解方法，然后，写出相应的逆矩阵即可；在求解矩阵的特征值时，要正确的写出该矩阵对应的特征多项式，难度系数较小，中低档题．

C．［选修 4 － 4：坐标系与参数方程］（本小题满分 10 分）

在极坐标中，已知圆 C 经过点 $P\left(\sqrt{2}，\frac{\pi}{4}\right)$，圆心为直线 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 与极轴的交点，求圆 C 的极坐标方程．

【答案与解析】

本小题主要考查直线和圆的极坐标方程等基础知识，考查转化问题的能力. 满分 10 分.

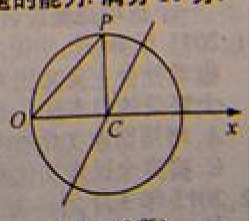
解：在 $\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 中令 $\theta=0$，得 $\rho=1$，

所以圆 C 的圆心坐标为 $(1，0)$.

因为圆 C 经过点 $P\left(\sqrt{2}，\frac{\pi}{4}\right)$，

所以圆 C 的半径 $PC=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2-2\times1\times\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}}=1$，

于是圆 C 过极点，所以圆 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$.



（第 21-C 题）

【点评】本题主要考查直线的参数方程和圆的参数方程、普通方程与参数方程的互化、两角和与差的三角函数．本题要注意已知圆的圆心是直线 $\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 与极轴的交点，考查三角函数的综合运用，对于参数方程的考查，主要集中在常见曲线的考查上，题目以中低档题为主．

D．［选修 4 － 5：不等式选讲］（本小题满分 10 分）

已知实数 x，y 满足：$|x+y|<\frac{1}{3}$，$|2x-y|<\frac{1}{6}$，求证：$|y|<\frac{5}{18}$．

【答案与解析】

D.［选修 4-5：不等式选讲］

本小题主要考查绝对值不等式的基础知识，考查推理论证能力. 满分 10 分.

证明：因为 $3|y|=|3y|=|2(x+y)-(2x-y)|\le 2|x+y|+|2x-y|$，

由题设知 $|x+y|<\frac{1}{3}$，$|2x-y|<\frac{1}{6}$，从而 $3|y|<\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$，

所以 $|y|<\frac{5}{18}$.

【点评】本题主要考查不等式的基本性质、绝对值不等式及其运用，属于中档题，难度适中. 切实注意绝对值不等式的性质与其灵活运用.

22.（本小题满分 10 分）

设 ξ 为随机变量，从棱长为 1 的正方体的 12 条棱中任取两条，当两条棱相交时，$\xi=0$；当两条棱平行时，ξ 的值为两条棱之间的距离；当两条棱异面时，$\xi=1$.

（1）求概率 $P(\xi=0)$；

（2）求 ξ 的分布列，并求其数学期望 $E(\xi)$.

【答案与解析】

所以 $|y|<\frac{5}{18}$.

【必做题】本小题主要考查概率分布、数学期望等基础知识，考查运算求解能力. 满分 10 分.

解：(1) 若两条棱相交，则交点必为正方体 8 个顶点中的 1 个，过任意 1 个顶点恰有 3 条棱，所以共有 $8C_3^2$ 对相交棱，因此 $P(\xi=0)=\frac{8C_3^2}{C_{12}^2}=\frac{8\times3}{66}=\frac{4}{11}$.

(2) 若两条棱平行，则它们的距离为 1 或 $\sqrt{2}$，其中距离为 $\sqrt{2}$ 的共有 6 对，

故 $P(\xi=\sqrt{2})=\frac{6}{C_{12}^2}=\frac{1}{11}$，

于是 $P(\xi=1)=1-P(\xi=0)-P(\xi=\sqrt{2})=1-\frac{4}{11}-\frac{1}{11}=\frac{6}{11}$，

所以随机变量 ξ 的分布列是

ξ	0	1	$\sqrt{2}$
$P(\xi)$	$\frac{4}{11}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{1}{11}$

因此 $E(\xi)=1\times\frac{6}{11}+\sqrt{2}\times\frac{1}{11}=\frac{6+\sqrt{2}}{11}$.

【点评】本题主要考查概率统计知识：离散型随机变量的分布列、数学期望的求解、随机事件的基本运算. 本题属于基础题目，难度中等偏上. 考查离散型随机变量的分布列和期望的求解，在列分布列时，要注意 ξ 的取值情况，不要遗漏 ξ 的取值情况.

23.（本小题满分 10 分）

设集合 $P_n=\{1,2,\cdots,n\}$，$n\in\mathbf{N}^*$. 记 $f(n)$ 为同时满足下列条件的集合 A 的个数：

① $A\subseteq P_n$；②若 $x\in A$，则 $2x\notin A$；③若 $x\in \complement_{P_n}A$，则 $2x\notin \complement_{P_n}A$.

（1）求 $f(4)$；

（2）求 $f(n)$ 的解析式（用 n 表示）.

【答案与解析】

【必做题】本小题主要考查集合的概念和运算、计数原理等基础知识，考查探究能力. 满分10分.

解：(1) 当 $n=4$ 时，符合条件的集合 A 为：$\{2\}$，$\{1,4\}$，$\{2,3\}$，$\{1,3,4\}$，

故 $f(4)=4$.

(2) 任取偶数 $x\in P_n$，将 x 除以 2，若商仍为偶数，再除以 2，…，经过 k 次以后，商必为奇数，此时记商为 m，于是 $x=m\cdot 2^k$，其中 m 为奇数，$k\in \mathbf{N}^*$.

由条件知，若 $m\in A$，则 $x\in A\Leftrightarrow k$ 为偶数；

若 $m\notin A$，则 $x\in A\Leftrightarrow k$ 为奇数.

于是 x 是否属于 A 由 m 是否属于 A 确定. 设 Q_n 是 P_n 中所有奇数的集合，因此 $f(n)$ 等于 Q_n 的子集个数. 当 n 为偶数（或奇数）时，P_n 中奇数的个数是 $\frac{n}{2}$（或 $\frac{n+1}{2}$），

所以 $f(n)=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为偶数},\\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$

【点评】本题重点考查集合的概念、组成、元素与集合的基本关系、集合的基本运算—补集和函数的解析式的求法. 本题属于中档题，难度适中.