**绝密★启用前**

2018年普通高等学校招生全国统一考试

# 理科数学

**注意事项：**

1．答卷前，考生务必将自己的姓名和准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

**一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1. 已知集合 $A=\{x \mid x-1\geq 0\}$，$B=\{0,1,2\}$，则 $A\bigcap B=$

A. $\{0\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

【答案】C

【解析】

【分析】由题意先解出集合A,进而得到结果．

【详解】解：由集合A得 $x\geq 1$，

所以 $A\cap B=\{1,2\}$

故答案选C.

【点睛】本题主要考查交集的运算，属于基础题．

2. $(1+i)(2-i)=$

A. $-3-i$　　B. $-3+i$　　C. $3-i$　　D. $3+i$

【答案】D

【解析】

【分析】由复数的乘法运算展开即可．

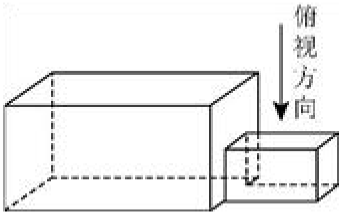
【详解】解：$(1+i)(2-i)=2-i+2i-i^2=3+i$

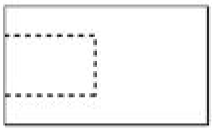
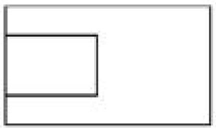
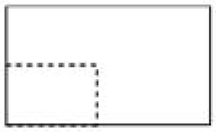
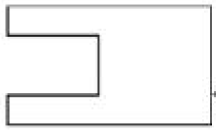
故选D.

【点睛】本题主要考查复数的四则运算，属于基础题．

3. 中国古建筑借助榫卯将木构件连接起来，构件的凸出部分叫榫头，凹进部分叫卯眼，图中木构件右边的

小长方体是榫头．若如图摆放的木构件与某一带卯眼的木构件咬合成长方体，则咬合时带卯眼的木构件的俯视图可以是



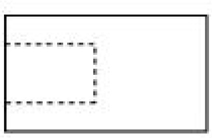

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【详解】详解：由题意知，题干中所给的是榫头，是凸出的几何体，求得是卯眼的俯视图，卯眼是凹进去的，即俯视图中应有一不可见的长方形，

且俯视图应为对称图形

故俯视图为 

故选 A.

点睛：本题主要考查空间几何体的三视图，考查学生的空间想象能力，属于基础题．

4. 若 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则 $\cos2\alpha=$

A. $\frac{8}{9}$ B. $\frac{7}{9}$ C. $-\frac{7}{9}$ D. $-\frac{8}{9}$

【答案】B

【解析】

【详解】分析：由公式 $\cos2\alpha=1-2sin^2\alpha$ 可得结果.

详解： $\cos2\alpha=1-2sin^2\alpha=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

故选 B.

点睛：本题主要考查二倍角公式，属于基础题.

5. $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^5$ 的展开式中 $x^4$ 的系数为

A. 10 B. 20 C. 40 D. 80

【答案】C

【解析】

【详解】分析：写出 $T_{r+1}=C_5^r\cdot 2^r\cdot x^{10-3r}$，然后可得结果

详解：由题可得 $T_{r+1}=C_5^r\cdot\left(x^2\right)^{5-r}\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^r=C_5^r\cdot 2^r\cdot x^{10-3r}$

令 $10-3r=4$,则 $r=2$

所以 $C_5^r\cdot 2^r=C_5^2\cdot 2^2=40$

故选 C.

点睛：本题主要考查二项式定理，属于基础题.

6. 直线 $x+y+2=0$ 分别与 $x$ 轴，$y$ 轴交于 A， $B$ 两点，点 $P$ 在圆 $\left(x-2\right)^2+y^2=2$ 上，则 $\triangle ABP$ 面积的取值范围是

A. $[2,6]$　　B. $[4,8]$　　C. $\left[\sqrt{2},3\sqrt{2}\right]$　　D. $\left[2\sqrt{2},3\sqrt{2}\right]$

【答案】A

【解析】

【详解】分析：先求出 A，B 两点坐标得到 $|AB|$,再计算圆心到直线距离，得到点 P 到直线距离范围，由面积公式计算即可

详解： $\because$ 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴， y 轴交于 A， B 两点

$\therefore A\left(-2,0\right),B\left(0,-2\right)$,则 $|AB|=2\sqrt{2}$

$\because$ 点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上

$\therefore$ 圆心为（2，0），则圆心到直线距离 $d_1=\frac{|2+0+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

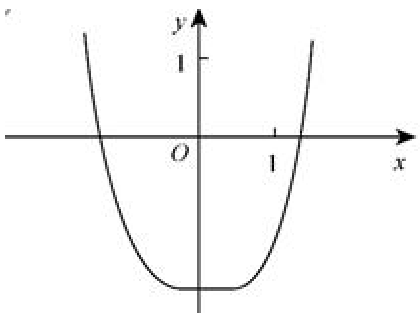
故点 P 到直线 $x+y+2=0$ 的距离 $d_2$ 的范围为 $\left[\sqrt{2},3\sqrt{2}\right]$

则 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}|AB|d_2=\sqrt{2}d_2\in\left[2,6\right]$

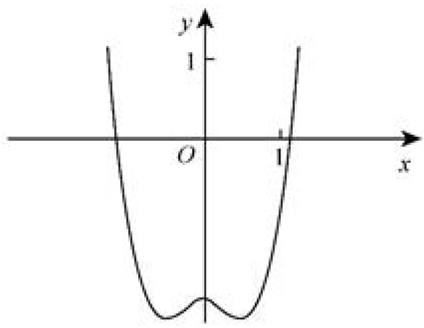
故答案选 A.

点睛：本题主要考查直线与圆，考查了点到直线的距离公式，三角形的面积公式，属于中档题.

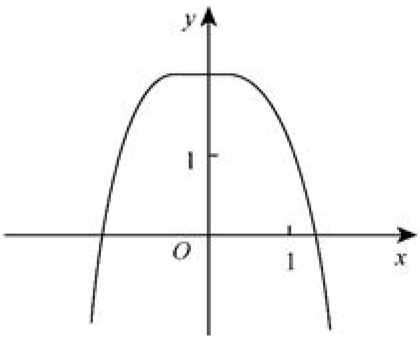
7. 函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图像大致为



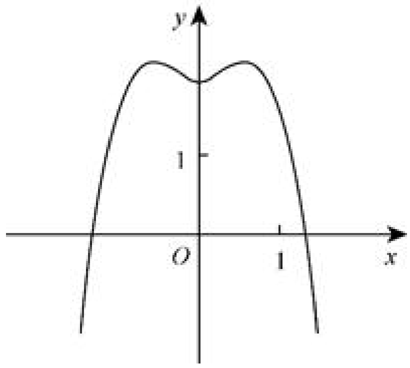
A.



B.



C.



D.

【答案】D

【解析】

【详解】分析：根据函数图象的特殊点，利用函数的导数研究函数的单调性，由排除法可得结果.

详解：函数过定点$\left(0,2\right)$，排除$A,B$，

求得函数的导数$f'\left(x\right)=-4x^{3}+2x=-2x\left(2x^{2}-1\right)$，

由$f'\left(x\right)>0$得$2x\left(2x^{2}-1\right)<0$，

得$x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，此时函数单调递增，排除$C$，故选 D.

点睛：本题通过对多个图象的选择考查函数的图象与性质，属于中档题.这类题型也是近年高考常见的命题方向，该题型的特点是综合性较强较强、考查知识点较多，但是并不是无路可循.解答这类题型可以从多方面入手，根据函数的定义域、值域、单调性、奇偶性、特殊点以及$x\to 0^{+},x\to 0^{-},x\to +\infty,x\to -\infty$时函数图象的变化趋势，利用排除法，将不合题意的选项一一排除.

8. 某群体中的每位成员使用移动支付的概率都为$p$，各成员的支付方式相互独立，设$X$为该群体的 10 位成员中使用移动支付的人数，$DX=2.4$，$P\left(X=4\right)<P\left(X=6\right)$，则$p=$

A. 0.7　　B. 0.6　　C. 0.4　　D. 0.3

【答案】B

【解析】

【详解】分析：判断出为二项分布，利用公式$D(X)=np(1-p)$进行计算即可.

$\because D(X)=np(1-p)$

$\therefore p=0.4$或$p=0.6$

$\because P(X=4)=C_{10}^{4}p^{4}(1-p)^{6}<P(X=6)=C_{10}^{6}p^{6}(1-p)^{4}$，

$\therefore (1-p)^{2}<p^{2}$,可知$p>0.5$

故答案选 B.

点睛：本题主要考查二项分布相关知识，属于中档题.

9. $\triangle ABC$的内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，若$\triangle ABC$的面积为$\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$，则$C=$

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

【答案】C

【解析】

【详解】分析：利用面积公式$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}absinC$和余弦定理$a^2+b^2-c^2=2abcosC$进行计算可得.

详解：由题可知$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}absinC=\frac{a^2+b^2-c^2}{4}$

所以$a^2+b^2-c^2=2\mathrm{absinC}$

由余弦定理$a^2+b^2-c^2=2abcosC$

所以$\sin C=\cos C$

$\because C\in(0,\pi)$

$\therefore C=\frac{\pi}{4}$

故选 C.

点睛：本题主要考查解三角形，考查了三角形的面积公式和余弦定理.

10. 设$A$，$B$，$C$，$D$是同一个半径为 4 的球的球面上四点，$\triangle ABC$为等边三角形且其面积为$9\sqrt{3}$，则三棱锥$D-ABC$体积的最大值为

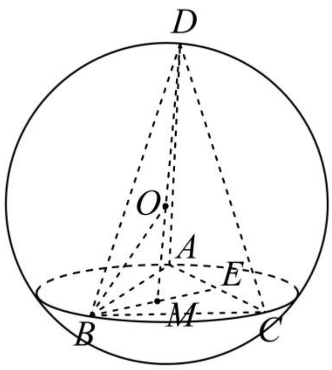
A. $12\sqrt{3}$　　B. $18\sqrt{3}$　　C. $24\sqrt{3}$　　D. $54\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【详解】分析：作图，D 为 MO 与球的交点，点 M 为三角形 ABC 的中心，判断出当 $DM\perp$ 平面 ABC 时，三棱锥 $D-ABC$ 体积最大，然后进行计算可得.

详解：如图所示，




点 M 为三角形 ABC 的中心，E 为 AC 中点，

当 $DM\perp$ 平面 ABC 时，三棱锥 $D-ABC$ 体积最大

此时，$OD=OB=R=4$

$\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB^2=9\sqrt{3}$

$\therefore AB=6$，

$\because$ 点 M 为三角形 ABC 的中心

$\therefore BM=\dfrac{2}{3}BE=2\sqrt{3}$

$\therefore Rt\triangle OMB$ 中，有 $OM=\sqrt{OB^2-BM^2}=2$

$\therefore DM=OD+OM=4+2=6$

$\therefore (V_{D-ABC})_{\max}=\dfrac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times 6=18\sqrt{3}$

故选 B.

点睛：本题主要考查三棱锥的外接球，考查了勾股定理，三角形的面积公式和三棱锥的体积公式，判断出当 $DM\perp$ 平面 ABC 时，三棱锥 $D-ABC$ 体积最大很关键，由 M 为三角形 ABC 的重心，计算得到 $BM=\dfrac{2}{3}BE=2\sqrt{3}$，再由勾股定理得到 OM，进而得到结果，属于较难题型.

11. 设 $F_1$，$F_2$ 是双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右焦点，$O$ 是坐标原点．过 $F_2$ 作 $C$ 的一条渐近线的垂线，垂足为 $P$．若 $|PF_1|=\sqrt{6}|OP|$，则 $C$ 的离心率为

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【详解】分析：由双曲线性质得到$|PF_2|=b$，$|\mathrm{PO}|=\mathrm{a}$然后在$\mathrm{Rt}\triangle \mathrm{PO}F_2$和在$\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2$中利用余弦定理可得.

详解：由题可知$|PF_2|=b,|OF_2|=c$

$\therefore |\mathrm{PO}|=\mathrm{a}$

在$\mathrm{Rt}\triangle \mathrm{PO}F_2$中，$\cos\angle \mathrm{P}F_2\mathrm{O}=\frac{|PF_2|}{|OF_2|}=\frac{b}{c}$

$\because$在$\triangle PF_1F_2$中，$\cos\angle \mathrm{P}F_2\mathrm{O}=\frac{|PF_2|^2+|F_1F_2|^2-|PF_1|^2}{2|PF_2||F_1F_2|}=\frac{b}{c}$

$\therefore \frac{b^2+4c^2-\left(\sqrt{6}a\right)^2}{2b\cdot 2c}=\frac{b}{c}\Rightarrow c^2=3a^2$

$\therefore \mathrm{e}=\sqrt{3}$

故选B.

点睛：本题主要考查双曲线的相关知识，考查了双曲线的离心率和余弦定理的应用，属于中档题.

12. 设$a=\log_{0.2}0.3$，$b=\log_2 0.3$，则

A. $a+b<ab<0$　　B. $ab<a+b<0$

C. $a+b<0<ab$　　D. $ab<0<a+b$

【答案】B

【解析】

【详解】分析：求出$\frac{1}{a}=\log 0.3^{0.2},\frac{1}{b}=log 0.3^2$，得到$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的范围，进而可得结果.

详解：$\because a=\log 0.2^{0.3},b=log 2^{0.3}$

$\therefore \frac{1}{a}=\log 0.3^{0.2},\frac{1}{b}=log 0.3^2$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=log_{0.3}0.4$

$\therefore 0<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<1$,即$0<\frac{a+b}{ab}<1$

又$\because a>0,b<0$

$\therefore ab<0$ 即 $ab<a+b<0$

故选 B.

点睛：本题主要考查对数的运算和不等式，属于中档题.

**二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.**

13. 已知向量 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(2,-2)$，$\vec{c}=(1,\lambda)$. 若 $\vec{c} \parallel (2\vec{a}+\vec{b})$，则 $\lambda=$________.

【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】由两向量共线的坐标关系计算即可.

【详解】由题可得 $2\vec{a}+\vec{b}=(4,2)$

$\because \vec{c}//(2\vec{a}+\vec{b})$，$\vec{c}=(1,\lambda)$

$\therefore 4\lambda-2=0$,即 $\lambda=\dfrac{1}{2}$

故答案为$\frac{1}{2}$

【点睛】本题主要考查向量的坐标运算，以及两向量共线的坐标关系，属于基础题.

14. 曲线 $y=(ax+1)e^x$ 在点 $(0，1)$ 处的切线的斜率为 $-2$，则 $a=$________.

【答案】$-3$

【解析】

【分析】求导，利用导数的几何意义计算即可.

【详解】解： $y'=ae^x+(ax+1)e^x$

则 $f'(0)=a+1=-2$

所以 $a=-3$

故答案为-3.

【点睛】本题主要考查导数的计算和导数的几何意义，属于基础题.

15. 函数 $f(x)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0，\pi]$ 的零点个数为________.

【答案】3

【解析】

【分析】方法一：求出$3x+\dfrac{\pi}{6}$的范围，再由函数值为零，得到$3x+\dfrac{\pi}{6}$的取值即得零点个数.

**【详解】[方法一]：【最优解】**

$\because 0\le x\le \pi \therefore \dfrac{\pi}{6}\le 3x+\dfrac{\pi}{6}\le \dfrac{19\pi}{6}$

由题可知$3x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2},3x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{2}$，或$3x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{2}$

解得$x=\dfrac{\pi}{9},\dfrac{4\pi}{9}$,或$\dfrac{7\pi}{9}$故有 3 个零点.

故答案为：3.

方法二：

令$f(x)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$，即$3x+\dfrac{\pi}{6}=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，解得，$x=\dfrac{k}{3}\pi+\dfrac{\pi}{9},k\in\mathbf{Z}$，分别令$k=0,1,2$，

得$x=\dfrac{\pi}{9},x=\dfrac{4\pi}{9},x=\dfrac{7\pi}{9}$，所以函数$f(x)=\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{6}\right)$在$[0,\pi]$的零点的个数为 3.

故答案为：3.

【整体点评】方法一：先求出$3x+\dfrac{\pi}{6}$的范围，再根据余弦函数在该范围内的零点，从而解出，是该题的最优解；

方法二：先求出函数的所有零点，再根据题中范围限制，找出符合题意的零点.

16. 已知点$M(-1,1)$和抛物线$C$：$y^2=4x$，过$C$的焦点且斜率为$k$的直线与$C$交于A，$B$两点. 若$\angle AMB=90°$，则$k=$________.

【答案】2

【解析】

【分析】方法一：利用点差法得到$AB$的斜率，结合抛物线定义可得结果.

**【详解】[方法一]：点差法**

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$\begin{cases}y_1^2=4x_1\\ y_2^2=4x_2\end{cases}$，所以$y_1^2-y_2^2=4x_1-4x_2$

所以$k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{4}{y_1+y_2}$，

取$AB$中点$M'(x_0,y_0)$,分别过点$A,B$作准线$x=-1$的垂线，垂足分别为$A',B'$

因为$\angle AMB=90^{\circ}$,$\therefore |MM'|=\dfrac{1}{2}|AB|=\dfrac{1}{2}(|AF|+|BF|)=\dfrac{1}{2}(|AA'|+|BB'|)$，

因为$M'$为$AB$中点，所以$MM'$平行于$x$轴，

因为 $M(-1,1)$，所以 $y_0=1$，则 $y_1+y_2=2$ 即 $k=2$.

故答案为：2.

**［方法二］:【最优解】焦点弦的性质**

记抛物线的焦点为 $F$，因为 $\angle AMB=90^\circ$，则以 $AB$ 为直径的圆与准线相切于点 $M$，由抛物线的焦点弦性质可知 $MF\perp AB$，所以 $k_{AB}=-\dfrac{1}{k_{FM}}=2$.

**［方法三］: 焦点弦性质+韦达定理**

记抛物线的焦点为 $F$，因为 $\angle AMB=90^\circ$，则以 $AB$ 为直径的圆与准线相切于点 $M$，记 $AB$ 中点为 $N$，则 $N\left(x_0,1\right)$，设 $AB:x=ty+1$，代入 $y^2=4x$ 中，得 $y^2-4ty-4=0$，所以 $y_1+y_2=4t=2$，得 $t=\dfrac{1}{2}$，所以 $k_{AB}=2$.

**［方法四］:【通性通法】暴力硬算**

由题知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$，设直线 $AB$ 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq0)$，代入 $C:y^2=4x$ 中得 $k^2x^2-\left(2k^2+4\right)x+k^2=0$，设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，则 $x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2},x_1x_2=1$，同理有 $y_1+y_2=\dfrac{4}{k},y_1y_2=-4$，由 $\angle AMB=90^\circ$，即 $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$. 又 $\overrightarrow{MA}=\left(x_1+1,y_1-1\right),\overrightarrow{MB}=\left(x_2+1,y_2-1\right)$，所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\left(x_1+1,y_1-1\right)\cdot\left(x_2+1,y_2-1\right)=\dfrac{2k^2+4}{k^2}-\dfrac{4}{k}-1=0$，得 $k=2$.

**［方法五］：距离公式+直角三角形的性质**

设直线为 $x=my+1$，与 $y^2=4x$ 联立得 $y^2-4my-4=0$，则 $\begin{cases}y_A+y_B=4m,\\ y_Ay_B=-4,\end{cases}$ 从而

$x_A+x_B=m\left(y_A+y_B\right)+2=4m^2+2$，可得 $AB$ 的中点 $N\left(2m^2+1,2m\right)$，所以

$|MN|=\sqrt{\left(2m^2+1+1\right)^2+(2m-1)^2}$.

又由弦长公式知 $|AB|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{\left(y_A+y_B\right)^2-4y_Ay_B}=4\left(1+m^2\right)$.

由 $\angle AMB=90^\circ$ 得 $2|MN|=|AB|$，解得 $m=\dfrac{1}{2}$，所以 $k=\dfrac{1}{m}=2$.

**［方法六］：焦点弦的性质应用**

由题可知，线段 $AB$ 为抛物线的焦点弦，$\angle AMB=90^\circ$，由于以抛物线的焦点弦为直径的圆必与准线相切，又点 $M$ 恰为抛物线准线上的点，因此，以 $AB$ 为直径的圆必与准线相切于点 $M$.

过点 $M$ 作平行于 $Ox$ 轴的直线交 $AB$ 于点 $N$，则 $N$ 为圆心.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),N(x_0,y_0)(y_1>0,y_2<0)$，则 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=1$.

又因为 $y_1\cdot y_2=-p^2=-4$，所以联立解得 $y_1=1+\sqrt{5}$. 将 $y_1$ 的值代入 $y_1^2=4x_1$ 中求得 $x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

因为抛物线 $C$ 的焦点 $F(1,0)$，所以 $k=k_{AB}=k_{NF}=\frac{1+\sqrt{5}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}-1}=2$.

【整体点评】方法一：根据点差法找出直线 $AB$ 的斜率与 $AB$ 两点纵坐标的关系，再根据抛物线定义求出 $AB$ 中点坐标，从而解出；

方法二：直接根据焦点弦的性质解出，是该题的最优解；

方法三：根据焦点弦性质可知，直线过点 $(x_0,1)$，再根据韦达定理求出直线 $AB$ 的斜率；

方法四：直接设出直线方程，联立运算，属于解决直线与抛物线位置关系问题的通性通法，思路直接，运算复杂；

方法五：反设直线，再通过联立，利用直角三角形的性质求解，运算较复杂；

方法六：利用焦点弦的性质直接求出其中一点的坐标，再根据斜率公式求出.

**三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．**

**（一）必考题：共 60 分.**

17. 等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1, a_5=4a_3$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）记 $S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和．若 $S_m=63$，求 $m$.

【答案】（1）$a_n=(-2)^{n-1}$ 或 $a_n=2^{n-1}$ .

（2）$m=6$.

【解析】

【详解】分析：（1）列出方程，解出 q 可得;（2）求出前 n 项和，解方程可得 m.

详解：（1）设 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$，由题设得 $a_n=q^{n-1}$.

由已知得 $q^4=4q^2$，解得 $q=0$（舍去），$q=-2$ 或 $q=2$.

故 $a_n=(-2)^{n-1}$ 或 $a_n=2^{n-1}$.

（2）若 $a_n=(-2)^{n-1}$，则 $S_n=\frac{1-(-2)^n}{3}$．由 $S_m=63$ 得 $(-2)^m=-188$，此方程没有正整数解.

若 $a_n=2^{n-1}$，则 $S_n=2^n-1$．由 $S_m=63$ 得 $2^m=64$，解得 $m=6$．

综上，$m=6$．

点睛：本题主要考查等比数列的通项公式和前 n 项和公式，属于基础题.

18. 某工厂为提高生产效率，开展技术创新活动，提出了完成某项生产任务的两种新的生产方式．为比较两种生产方式的效率，选取 40 名工人，将他们随机分成两组，每组 20 人，第一组工人用第一种生产方式，第二组工人用第二种生产方式．根据工人完成生产任务的工作时间（单位：min）绘制了如下茎叶图：

| 第一种生产方式 | | 第二种生产方式 |
|---|---|---|
| 8 | 6 | 5 5 6 8 9 |
| 9 7 6 2 | 7 | 0 1 2 2 3 4 5 6 6 8 |
| 9 8 7 7 6 5 4 3 3 2 | 8 | 1 4 4 5 |
| 2 1 1 0 0 | 9 | 0 |

（1）根据茎叶图判断哪种生产方式的效率更高？并说明理由；

（2）求 40 名工人完成生产任务所需时间的中位数 $m$，并将完成生产任务所需时间超过 $m$ 和不超过 $m$ 的工人数填入下面的列联表：

| | 超过 $m$ | 不超过 $m$ |
|---|---|---|
| 第一种生产方式 | | |
| 第二种生产方式 | | |

（3）根据（2）中的列联表，能否有 99%的把握认为两种生产方式的效率有差异？

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

| $P(K^2\geqslant k)$ | 0.050 | 0.010 | 0.001 |
|---|---|---|---|
| $k$ | 3.841 | 6.635 | 10.828 |

【答案】（1）第二种生产方式的效率更高．理由见解析

（2）80

（3）能

【解析】

【详解】分析：（1）计算两种生产方式的平均时间即可．

（2）计算出中位数，再由茎叶图数据完成列联表.

（3）由公式计算出 $k^2$，再与 6.635 比较可得结果.

详解：（1）第二种生产方式的效率更高.

理由如下：

（i）由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人中，有 75%的工人完成生产任务所需时间至少 80 分钟，用第二种生产方式的工人中，有 75%的工人完成生产任务所需时间至多 79 分钟.因此第二种生产方式的效率更高.

（ii）由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为 85.5 分钟，用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为 73.5 分钟.因此第二种生产方式的效率更高.

（iii）由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间高于 80 分钟；用第二种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间低于 80 分钟，因此第二种生产方式的效率更高.

（iv）由茎叶图可知：用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎 8 上的最多，关于茎 8 大致呈对称分布；用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎 7 上的最多，关于茎 7 大致呈对称分布，又用两种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布的区间相同，故可以认为用第二种生产方式完成生产任务所需的时间比用第一种生产方式完成生产任务所需的时间更少，因此第二种生产方式的效率更高.

以上给出了 4 种理由，考生答出其中任意一种或其他合理理由均可得分.

（2）由茎叶图知 $m=\dfrac{79+81}{2}=80$.

列联表如下：

| | 超过 $m$ | 不超过 $m$ |
|---|---|---|
| 第一种生产方式 | 15 | 5 |
| 第二种生产方式 | 5 | 15 |

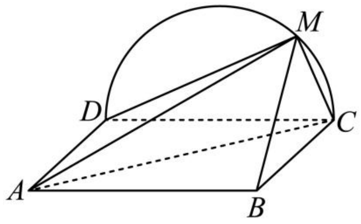
（3）由于 $K^2=\dfrac{40\left(15\times15-5\times5\right)^2}{20\times20\times20\times20}=10>6.635$，所以有 99%的把握认为两种生产方式的效率有差异.

点睛：本题主要考查了茎叶图和独立性检验，考查学生的计算能力和分析问题的能力，贴近生活.

19. 如图，边长为 2 的正方形 $ABCD$ 所在的平面与半圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 所在平面垂直，$M$ 是 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 $C$，$D$ 的点.

（1）证明：平面 $AMD\perp$ 平面 $BMC$；

（2）当三棱锥 $M-ABC$ 体积最大时，求面 $MAB$ 与面 $MCD$ 所成二面角的正弦值.



【答案】(1)证明见解析;(2)$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

【解析】

【分析】(1)方法一:先证 $BC\perp$ 平面 $CMD$,得 $BC\perp DM$,再证 $CM\perp DM$,由线面垂直的判定定理可得 $DM\perp$ 平面 $BMC$,即可根据面面垂直的判定定理证出;

(2)方法一:先建立空间直角坐标系,然后判断出 $M$ 的位置,求出平面 $MAB$ 和平面 $MCD$ 的法向量,进而求得平面 $MAB$ 与平面 $MCD$ 所成二面角的正弦值.

【详解】(1)**[方法一]:【最优解】判定定理**

由题设知,平面 $CMD\perp$ 平面 $ABCD$,交线为 $CD$.因为 $BC\perp CD$,$BC\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $BC\perp$ 平面 $CMD$,故 $BC\perp DM$.因为 $M$ 为 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 $C$,$D$ 的点,且 $DC$ 为直径,所以 $DM\perp CM$.

又 $BC\cap CM=C$,所以 $DM\perp$ 平面 $BMC$.而 $DM\subset$ 平面 $AMD$,故平面 $AMD\perp$ 平面 $BMC$.

**[方法二]:判定定理**

由题设知,平面 $CMD\perp$ 平面 $ABCD$,交线为 $CD$.因为 $AD\perp CD$,$AD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $AD\perp$ 平面 $MCD$,而 $CM\subset$ 平面 $MCD$,所以 $AD\perp CM$,因为 $M$ 为 $\overset{\frown}{CD}$ 上异于 $C$,$D$ 的点,且 $DC$ 为直径,所以 $DM\perp CM$.

又 $AD\cap DM=D$,所以,$CM\perp$ 平面 $AMD$,而 $CM\subset$ 平面 $BMC$,所以平面 $AMD\perp$ 平面 $BMC$.

**[方法三]:向量法**

建立直角坐标系,如图 2,设 $M(0,a,b)$,$D(0,0,0),A(2,0,0),B(2,2,0),C(0,2,0)$,

所以 $\overrightarrow{DA}=(2,0,0),\overrightarrow{DM}=(0,a,b)$,

设平面 $AMD$ 的一个法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$,所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DA}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{DM}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}2x_1=0\\ay_1+bz_1=0\end{cases}$,

取平面 $AMD$ 的一个法向量 $\vec{m}=(0,b,-a)$,

同理可得,平面 $BMC$ 的一个法向量 $\vec{n}=(0,b,2-a)$,因为点 $M$ 在以 $(0,1,0)$ 为圆心,半径为1的圆上,所以,$(a-1)^2+b^2=1$,即 $a^2+b^2-2a=0$,而 $\vec{m}\cdot\vec{n}=a^2+b^2-2a=0$,所以平面 $AMD\perp$ 平面 $BMC$.

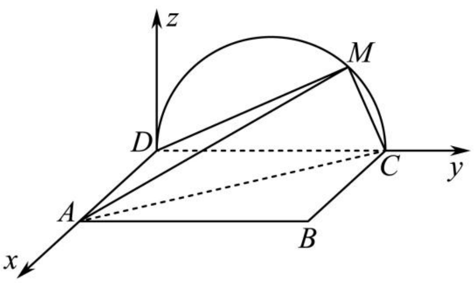
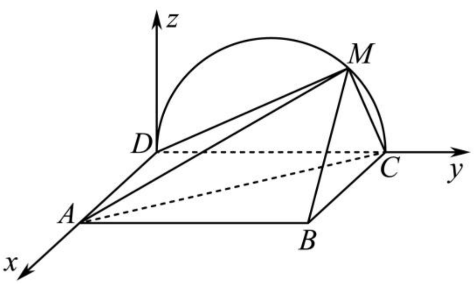



图2

（2）［方法一］：**【通性通法】向量法**

以 $D$ 为坐标原点,$\overrightarrow{DA}$ 的方向为 $x$ 轴正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$.




当三棱锥 $M-ABC$ 体积最大时，$M$ 为 $\overset{\frown}{CD}$ 的中点.

由题设得 $D(0,0,0),A(2,0,0),B(2,2,0),C(0,2,0),M(0,1,1)$，

$\overrightarrow{AM}=(-2,1,1),\overrightarrow{AB}=(0,2,0),\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 $MAB$ 的法向量,则

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2x+y+z=0\\ 2y=0\end{cases}$，可取 $\vec{n}=(1,0,2)$.

$\overrightarrow{DA}$ 是平面 $MCD$ 的一个法向量,因此 $\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{DA}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DA}}{|\vec{n}||\overrightarrow{DA}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\langle\vec{n},\overrightarrow{DA}\rangle=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以面 $MAB$ 与面 $MCD$ 所成二面角的正弦值是 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

**［方法二］：几何法（作平行线找公共棱）**

如图 3，当点 $M$ 与圆心 $O$ 连线 $MO\perp DC$ 时，三棱锥 $M-ABC$ 体积最大．过点 $M$ 作 $EF/\!/DC,ED\perp DC,FC\perp DC$，易证 $\angle BFC$ 为所求二面角的平面角．在 $\mathrm{Rt}\triangle BCF$ 中，

$\sin\angle BFC=\dfrac{BC}{BF}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，即面 $MAB$ 与面 $MCD$ 所成二面角的正弦值是 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

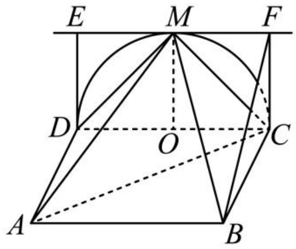


图3

［方法三］：【最优解】面积射影法

设平面 $MAB$ 与平面 $MCD$ 所成二面角的平面角为 $\theta$ .

由题可得 $\triangle MAB$ 在 $\triangle MCD$ 平面上的射影图形正好是 $\triangle MCD$ .

取 $AB$ 和 $CD$ 的中点分别为 $N$ 和 $O$，则可得 $OM=1$， $MN=\sqrt{5}$，所以由射影面积公式有

$\cos\theta=\frac{S_{\triangle MCD}}{S_{\triangle MAB}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，所以 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即面 $MAB$ 与面 $MCD$ 所成二面角的正弦值是 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

［方法四］：定义法

如图 4，可知平面 $MAB$ 与平面 $MCD$ 的交线 $l$ 过点 $M$，可以证明 $l//AB,l//CD$ . 分别取 $CD,AB$ 的中点 $O$，$E$，联结 $OE,MO,ME$ ，可证得直线 $CD\perp$ 平面 $OME$ ，于是 $l\perp$ 平面 $OME$ ，所以 $l\perp MO,l\perp ME$ ，故 $\angle OME$ 是面 $MAB$ 与面 $MCD$ 所成二面角的平面角.

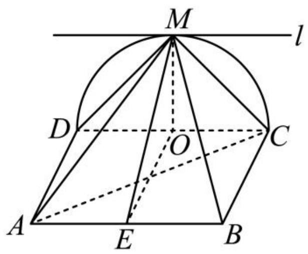


图4

在 $\triangle OME$ 中， $MO\perp OE,MO=1,OE=2$ ，则 $ME=\sqrt{5}$，所以 $\sin\angle OME=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，即面 $MAB$ 与面 $MCD$ 所成二面角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

【整体点评】（1）方法一：利用面面垂直的判定定理寻找合适的线面垂直即可证出，是本题的最优解；

方法二：同方法一，只不过找的线面垂直不一样；

方法三：利用向量法，计算两个平面的法向量垂直即可，思路简单，运算较繁.

（2）方法一：直接利用向量法解决无棱二面角问题，是该类型题的通性通法；

方法二：作平行线找公共棱，从而利用二面角定义找到二面角的平面角，是传统解决无棱二面角问题的方式；

方法三：面积射影法也是传统解决无棱二面角问题的方式，是本题的最优解；

方法四：同方法二，通过找到二面角的公共棱，再利用定义找到平面角，即可解出．

20. 已知斜率为$k$的直线$l$与椭圆$C$：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$交于$A$，$B$两点，线段$AB$的中点为$M(1, m)(m>0)$．

（1）证明：$k<-\frac{1}{2}$；

（2）设$F$为$C$的右焦点，$P$为$C$上一点,且$\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$．证明：$|\overrightarrow{FA}|$，$|\overrightarrow{FP}|$，$|\overrightarrow{FB}|$成等差数列，并求该数列的公差．

【答案】（1）$k<-\frac{1}{2}$；（2）证明见解析，公差为$\frac{3\sqrt{21}}{28}$或$-\frac{3\sqrt{21}}{28}$．

【解析】

【分析】（1）方法一：设而不求，利用点差法进行证明．

（2）方法一：解出$m$,进而求出点$P$的坐标，得到$|\overrightarrow{FP}|$,再由两点间距离公式表示出$|\overrightarrow{FA}|$，$|\overrightarrow{FB}|$，得到直线的方程，联立直线与椭圆方程由韦达定理进行求解．

【详解】（1）**[方法一]：【最优解】点差法**

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1,\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$．

两式相减，并由$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=k$得$\frac{x_1+x_2}{4}+\frac{y_1+y_2}{3}\cdot k=0$，

由题设知$\frac{x_1+x_2}{2}=1,\frac{y_1+y_2}{2}=m$，于是$k=-\frac{3}{4m}$.①

由题设得$0<m<\frac{3}{2}$，故$k<-\frac{1}{2}$．

**[方法二]：【通性通法】常规设线**

设$AB:y=kx+t$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，当$k=0$时，显然不满足题意；

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=kx+t\end{cases}$得，$(3+4k^2)x^2+8ktx+4t^2-12=0$，所以，$x_1+x_2=-\frac{8kt}{3+4k^2}$，

$\Delta>0$，即$4k^2+3-t^2>0$，而$\frac{x_1+x_2}{2}=1$，所以$3+4k^2=-4kt$，

又$m=k+t=k-\frac{4k^2+3}{4k}=\frac{-3}{4k}>0$，所以$k<0$，

$4k^2+3-\left(\frac{4k^2+3}{-4k}\right)^2>0$，即$k^2>\frac{1}{4}$，解得：$k<-\frac{1}{2}$．

［方法三］：直线与椭圆系的应用

对原椭圆作关于$M(1,m)$对称的椭圆为$\dfrac{(2-x)^2}{4}+\dfrac{(2m-y)^2}{3}=1$.

两椭圆方程相减可得$x+\dfrac{4m}{3}y=1+\dfrac{4}{3}m^2$，即为$AB$的方程，故$k=-\dfrac{3}{4m}$.

又点$M(1,m)$在椭圆$C$内部可得$\dfrac{1}{4}+\dfrac{m^2}{3}<1$，解得：$0<m<\dfrac{3}{2}$.

所以$k=-\dfrac{3}{4m}<-\dfrac{1}{2}$.

［方法四］：直线参数方程的应用

设$l$的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\cos\theta,\\ y=m+t\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为$l$倾斜角，$t$为参数）代入椭圆$C$中得

$\left(3\cos^2\theta+4\sin^2\theta\right)t^2+(6\cos\theta+8m\sin\theta)t-9+4m^2=0$. 设$t_1,t_2$是线段中点$A,B$对应的参数，$M(1,m)$是线段$AB$中点，知$t_1+t_2=0$得$-(6\cos\theta+8m\sin\theta)=0$，即$k=\tan\theta=-\dfrac{3}{4m}$. 而点$M(1,m)$在$C$内得$\dfrac{1}{4}+\dfrac{m^2}{3}<1$，解得：$m\in\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$，所以$k=-\dfrac{3}{4m}<-\dfrac{1}{2}$.

（2）［方法一］：【通性通法】常规运算＋整体思想

由题意得$F(1,0)$，设$P\left(x_3,y_3\right)$，则

$\left(x_3-1,y_3\right)+\left(x_1-1,y_1\right)+\left(x_2-1,y_2\right)=(0,0)$.

由（1）及题设得$x_3=3-\left(x_1+x_2\right)=1,y_3=-\left(y_1+y_2\right)=-2m<0$.

又点$P$在$C$上，所以$m=\dfrac{3}{4}$，从而$P\left(1,-\dfrac{3}{2}\right)$，$\left|\overrightarrow{FP}\right|=\dfrac{3}{2}$.

于是$\left|\overrightarrow{FA}\right|=\sqrt{\left(x_1-1\right)^2+{y_1}^2}=\sqrt{\left(x_1-1\right)^2+3\left(1-\dfrac{{x_1}^2}{4}\right)}=2-\dfrac{x_1}{2}$.

同理$\left|\overrightarrow{FB}\right|=2-\dfrac{x_2}{2}$，所以$\left|\overrightarrow{FA}\right|+\left|\overrightarrow{FB}\right|=4-\dfrac{1}{2}\left(x_1+x_2\right)=3$.

故$2\left|\overrightarrow{FP}\right|=\left|\overrightarrow{FA}\right|+\left|\overrightarrow{FB}\right|$，即$\left|\overrightarrow{FA}\right|$，$\left|\overrightarrow{FP}\right|$，$\left|\overrightarrow{FB}\right|$成等差数列.

设该数列的公差为$d$，则

$2|d|=\left|\left|\overrightarrow{FB}\right|-\left|\overrightarrow{FA}\right|\right|=\dfrac{1}{2}\left|x_1-x_2\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}$.②

将$m=\dfrac{3}{4}$代入①得$k=-1$.

所以 $l$ 的方程为 $y=-x+\frac{7}{4}$，代入 $C$ 的方程，并整理得 $7x^2-14x+\frac{1}{4}=0$.

故 $x_1+x_2=2, x_1x_2=\frac{1}{28}$，代入②解得 $|d|=\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

所以该数列的公差为 $\frac{3\sqrt{21}}{28}$ 或 $-\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

［方法二］：硬算

由 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$，知点 $F$ 为 $\triangle PAB$ 的重心，由三角形重心坐标公式可得 $x_P=1, y_P=-2m$，即 $P(1,-2m)$.

由点 $P$ 在椭圆上，把坐标代入方程解得 $m=\frac{3}{4}$，即 $P(1,-\frac{3}{2})$.

由（1）有 $k=-\frac{3}{4m}=-1$，直线 $l$ 的方程为 $y=-x+\frac{7}{4}$，将其与椭圆方程联立消去 $y$ 得 $28x^2-56x+1=0$，

求得 $x_{1,2}=\frac{14\pm3\sqrt{21}}{14}$，不妨设 $x_A<x_B$，所以 $x_A=\frac{14-3\sqrt{21}}{14}$，$x_B=\frac{14+3\sqrt{21}}{14}$，

$|\overrightarrow{FA}|=\sqrt{\left(x_A-1\right)^2+y_A^2}=\sqrt{\left(x_A-1\right)^2+3\left(1-\frac{x_A^2}{4}\right)}=2-\frac{x_A}{2}=\frac{42+3\sqrt{21}}{28}$，同理可得，

$|\overrightarrow{FB}|=2-\frac{x_B}{2}=\frac{42-3\sqrt{21}}{28}$，所以 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=3$，而 $|\overrightarrow{FP}|=\frac{3}{2}$，故 $\left|\overrightarrow{FA}\right|+\left|\overrightarrow{FB}\right|=2\left|\overrightarrow{FP}\right|$.

即该数列的公差为 $\frac{3\sqrt{21}}{28}$ 或 $-\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

［方法三］：【最优解】焦半径公式的应用

因为线段 $AB$ 的中点为 $M(1,m)$，得 $x_1+x_2=2$.

由 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\vec{0}$，知点 $F$ 为 $\triangle PAB$ 的重心，由三角形重心坐标公式可得 $x_P=1$，

由椭圆方程可知，$\mathrm{e}=\frac{1}{2}$

由椭圆的焦半径公式得 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=\left(a-\mathrm{e}x_1\right)+\left(a-\mathrm{e}x_2\right)=2a-\mathrm{e}\left(x_1+x_2\right)=3$，$|\overrightarrow{FP}|=a-\mathrm{e}x_P=\frac{3}{2}$. 所以 $\left|\overrightarrow{FA}\right|+\left|\overrightarrow{FB}\right|=2\left|\overrightarrow{FP}\right|$.

由方法二硬算可得，$x_A=\frac{14+3\sqrt{21}}{14}$ 或 $x_A=\frac{14-3\sqrt{21}}{14}$，从而公差为 $\frac{3}{2}-\left(2-\frac{1}{2}x_A\right)=\frac{1}{2}\left(x_A-1\right)$，即该数

列的公差为$\frac{3\sqrt{21}}{28}$或$-\frac{3\sqrt{21}}{28}$.

【整体点评】(1)方法一：利用点差法找出斜率与中点坐标的关系，再根据中点在椭圆内得到不等关系，即可解出，对于中点问题，点差法是解决此类问题的常用解法，也是该题的最优解；

方法二：常规设线，通过联立得出根与系数的关系（韦达定理），再根据$\Delta>0$即可证出，该法是解决直线与圆锥曲线位置关系的通性通法.

方法三:；类比直线与圆系，采用直线与椭圆系的应用，可快速求出公共弦所在直线方程，从而得出斜率，进而得证，避免联立过程，适当简化运算；

方法四：利用直线的参数方程以及参数的几何意义，联立求出斜率；

（2）方法一：直接根据题意运算结合整体思想，是通性通法；

方法二：直接硬算，思路直接，计算量较大；

方法三：利用焦半径公式简化运算，是该题的最优解.

21. 已知函数$f\left(x\right)=\left(2+x+ax^{2}\right)\ln\left(1+x\right)-2x$.

（1）若$a=0$，证明：当$-1<x<0$时，$f\left(x\right)<0$；当$x>0$时，$f\left(x\right)>0$；

（2）若$x=0$是$f\left(x\right)$的极大值点，求$a$.

【答案】(1）见解析

（2）$a=-\frac{1}{6}$

【解析】

【详解】分析：(1）求导，利用函数单调性证明即可.

（2）分类讨论$a\geq 0$和$a<0$,构造函数$h\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)}{2+x+ax^{2}}$,讨论$h\left(x\right)$的性质即可得到a的范围.

详解：(1）当$a=0$时，$f\left(x\right)=\left(2+x\right)\ln\left(1+x\right)-2x$，$f'\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)-\frac{x}{1+x}$.

设函数$g\left(x\right)=f'\left(x\right)=\ln\left(1+x\right)-\frac{x}{1+x}$，则$g'\left(x\right)=\frac{x}{\left(1+x\right)^{2}}$.

当$-1<x<0$时，$g'\left(x\right)<0$；当$x>0$时，$g'\left(x\right)>0$.故当$x>-1$时，$g\left(x\right)\geq g\left(0\right)=0$，且仅当$x=0$时，$g\left(x\right)=0$，从而$f'\left(x\right)\geq 0$，且仅当$x=0$时，$f'\left(x\right)=0$.

所以$f\left(x\right)$在$\left(-1,+\infty\right)$单调递增.

又$f\left(0\right)=0$，故当$-1<x<0$时，$f\left(x\right)<0$；当$x>0$时，$f\left(x\right)>0$.

（2）(i) 若 $a \ge 0$，由（1）知，当 $x>0$ 时，$f(x) \ge (2+x)\ln(1+x)-2x>0=f(0)$，这与 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点矛盾.

(ii) 若 $a<0$，设函数 $h(x)=\dfrac{f(x)}{2+x+ax^2}=\ln(1+x)-\dfrac{2x}{2+x+ax^2}$.

由于当 $|x|<\min\{1,\sqrt{\dfrac{1}{|a|}}\}$ 时，$2+x+ax^2>0$，故 $h(x)$ 与 $f(x)$ 符号相同.

又 $h(0)=f(0)=0$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点当且仅当 $x=0$ 是 $h(x)$ 的极大值点.

$$h'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{2(2+x+ax^2)-2x(1+2ax)}{(2+x+ax^2)^2}=\frac{x^2(a^2x^2+4ax+6a+1)}{(x+1)(ax^2+x+2)^2}.$$

如果 $6a+1>0$，则当 $0<x<-\dfrac{6a+1}{4a}$，且 $|x|<\min\{1,\sqrt{\dfrac{1}{|a|}}\}$ 时，$h'(x)>0$，故 $x=0$ 不是 $h(x)$ 的极大值点.

如果 $6a+1<0$，则 $a^2x^2+4ax+6a+1=0$ 存在根 $x_1<0$，故当 $x\in(x_1,0)$，且 $|x|<\min\{1,\sqrt{\dfrac{1}{|a|}}\}$ 时，$h'(x)<0$，所以 $x=0$ 不是 $h(x)$ 的极大值点.

如果 $6a+1=0$，则 $h'(x)=\dfrac{x^3(x-24)}{(x+1)(x^2-6x-12)^2}$.则当 $x\in(-1,0)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$.所以 $x=0$ 是 $h(x)$ 的极大值点，从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

综上，$a=-\dfrac{1}{6}$.

点睛：本题考查函数与导数的综合应用，利用函数的单调性求出最值证明不等式，第二问分类讨论 $\mathrm{a}\ge 0$ 和 $\mathrm{a}<0$,当 $\mathrm{a}<0$ 时构造函数 $\mathrm{h}(\mathrm{x})=\dfrac{f(x)}{2+x+ax^2}$ 时关键，讨论函数 $\mathrm{h}(\mathrm{x})$ 的性质，本题难度较大.

**（二）选考题：共 10 分，请考生在第 22、23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分.**

22.

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，$\odot O$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），过点 $(0，-\sqrt{2})$ 且倾斜角为 $\alpha$ 的直线 $l$ 与 $\odot O$ 交于 $A$，$B$ 两点.

（1）求 $\alpha$ 的取值范围；

（2）求 $AB$ 中点 $P$ 的轨迹的参数方程.

【答案】（1）$(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$

（2）$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha, \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha \end{cases}$ （$\alpha$ 为参数，$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$ ）

【解析】

【详解】分析：（1）由圆与直线相交，圆心到直线距离 $d<r$ 可得．

（2）联立方程，由根与系数的关系求解

详解：（1）$\odot O$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=1$．

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，$l$ 与 $\odot O$ 交于两点．

当 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ 时，记 $\tan\alpha=k$，则 $l$ 的方程为 $y=kx-\sqrt{2}$．$l$ 与 $\odot O$ 交于两点当且仅当 $\left|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+k^2}}\right|<1$，解得 $k<-1$ 或 $k>1$，即 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 或 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$．

综上，$\alpha$ 的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$．

（2）$l$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=t\cos\alpha, \\ y=-\sqrt{2}+t\sin\alpha \end{cases}$ （$t$ 为参数，$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$ ）．

设 A，$B$，$P$ 对应的参数分别为 $t_A$，$t_B$，$t_P$，则 $t_P=\frac{t_A+t_B}{2}$，且 $t_A$，$t_B$ 满足 $t^2-2\sqrt{2}t\sin\alpha+1=0$．

于是 $t_A+t_B=2\sqrt{2}\sin\alpha$，$t_P=\sqrt{2}\sin\alpha$．又点 $P$ 的坐标 $(x,y)$ 满足 $\begin{cases} x=t_P\cos\alpha, \\ y=-\sqrt{2}+t_P\sin\alpha. \end{cases}$

所以点 $P$ 的轨迹的参数方程是 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha, \\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2\alpha \end{cases}$ （$\alpha$ 为参数，$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$ ）．

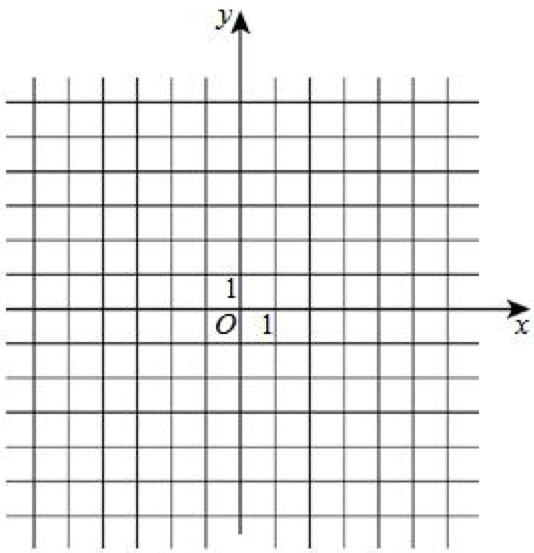
点睛：本题主要考查直线与圆的位置关系，圆的参数方程，考查求点的轨迹方程，属于中档题．

23.

设函数 $f(x)=|2x+1|+|x-1|$．

（1）画出 $y=f(x)$ 的图像；

（2）当 $x\in[0，+\infty)$，$f(x)\leq ax+b$，求 $a+b$ 的最小值．




【答案】（1）见解析

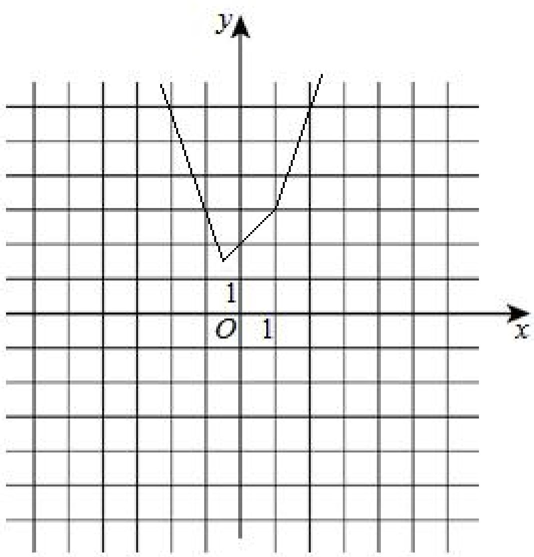
（2）5

【解析】

【详解】分析：（1）将函数写成分段函数，再画出在各自定义域的图像即可.

（2）结合（1）问可得 a，b 范围，进而得到 a+b 的最小值

详解：（1）$f\left(x\right)=\begin{cases}-3x,x<-\dfrac{1}{2},\\ x+2,-\dfrac{1}{2}\le x<1,\\ 3x,x\ge 1.\end{cases}$ $y=f\left(x\right)$的图像如图所示.




（2）由（1）知，$y=f\left(x\right)$的图像与$y$轴交点的纵坐标为$2$，且各部分所在直线斜率的最大值为$3$，故当且仅当$a\ge 3$且$b\ge 2$时，$f\left(x\right)\le ax+b$在$\left[0,+\infty\right)$成立，因此$a+b$的最小值为$5$.

点睛：本题主要考查函数图像的画法，考查由不等式求参数的范围，属于中档题．