宜昌市一中 2019-2020 学年高二上学期期末数学模拟卷

一、选择题：（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

1.如果复数$\dfrac{1-ai}{2+i}$（$a\in R$，i为虚数单位）的实部与虚部相等，则a的值为(　)

A．1　　B．−1　　C．3　　D．−3

2．双曲线$x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$的渐近线的斜率是(　)

A．$\pm\dfrac{1}{9}$　　B．$\pm\dfrac{1}{3}$　　C．±3　　D．±9

3. 设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前项和，若$S_3=3$，$S_6=24$，则$a_9=$(　)

A．15　　B．45　　C．192　　D．27

4．已知函数$f(x)=x\ln x+a$在点$(1,f(1))$处的切线经过原点，则实数$a=$(　)

A．1　　B．0　　C．$\dfrac{1}{e}$　　D．-1

5. 若直线$mx+ny=4$和圆$O:x^2+y^2=4$没有交点，则过点(m,n)的直线与椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$的交点个数为(　)个.

A．至多一个　　B．0　　C．1　　D．2

6. 下列命题中的假命题是(　)

A. 对于命题，$p:\exists x_0\in R,x_0{}^2+x_0\le0$，则$\neg p:\forall x\in R,x^2+x>0$

B.“$x=3$”是“$x^2-3x=0$”的充分不必要条件

C. 抛物线$y=8x^2$的准线方程是$y=-2$

D. 若两直线$3x+4y+3=0$与$6x+my+1=0$平行，则它们之间的距离为$\dfrac{1}{2}$

7. 一个四面体的顶点在空间直角坐标系$O-xyz$中的坐标分别是$A(0,0,\sqrt{5})$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(\sqrt{3},1,\sqrt{5})$，则该四面体的外接球的体积为(　)

A．16π　　B．9π　　C．$\dfrac{9\pi}{2}$　　D．$\dfrac{32\pi}{3}$

8.中国古代诗词中，有一道“八子分绵”的数学名题：“九百九十六斤绵，赠分八子做盘缠,次第每人多十七，要将第八数来言”. 题意是：把 996 斤绵分给 8 个儿子作盘缠，按照年龄从大到小的顺序依次分绵，年龄小的比年龄大的多 17 斤绵，那么第 8 个儿子分到的绵是（　）

A．174 斤　　B．184 斤　　C．191 斤　　D．201 斤

9. 已知抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点F恰好是双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点，且两条曲线的交点的连线过点$F$，则该双曲线的离心率为（　）

A．$\sqrt{2}+1$　　B．2　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}+1$

10. 函数$f(x)=\sin(2x+\varphi)$ $(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位后为偶函数，设数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=f(\dfrac{n\pi}{6})$，则数列$\{a_n\}$的前 2019 项之和为（　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．−2

11. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x-4, & x\ge\lambda\\ x^2-4x+3, & x<\lambda\end{cases}$，若函数$f(x)$恰有 2 个零点，则实数$\lambda$的取值范围是（　）

A．$(1,3)\cup[4,+\infty)$　　B．$(1,3]\cup(4,+\infty)$　　C．$(1,3]$　　D．$[4,+\infty)$

12. 已知中心在原点O，焦点在y轴上，且离心率为$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$的椭圆与经过点$C(-1,0)$的直线l交于A,B两点，若点C在椭圆内，ΔOAB的面积被x轴分成两部分，且ΔOAC与ΔOBC的面积之比为$4:1$，则ΔOAB面积的最大值为（　）

A．$\dfrac{5}{4}$　　B．$\dfrac{3}{2}$　　C．$\dfrac{15}{13}$　　D．$\dfrac{9}{4}$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 已知向量$\vec{a}$=（4，2），向量$\vec{b}$=（x，3），且$\vec{a}//\vec{b}$，则$|\vec{b}|$= ______.

14. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E是A_1B_1的中点，则异面直线AE与BC_1所成角的余弦值是__________.

15. 已知圆 $(x-a)^2+y^2=9\ (a>5)$ 上存在点 M，使 $|OM|=2|MQ|$（O 为原点）成立，$Q(2,0)$，则实数 a 的取值范围是________________.

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2a_n-2^{n+1}$，若不等式 $2n^2-n-3<(5-\lambda)a_n$ 对 $\forall n\in N^*$ 恒成立，则整数 λ 的最大值为__________.

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

已知命题 p：方程 $\frac{x^2}{2m}+\frac{y^2}{9-m}=1$ 表示焦点在y轴上的椭圆，命题 q：双曲线 $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{m}=1$ 的离心率 $e\in(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2})$，若命题 p 和命题 q 有且只有一个是真命题，求实数m的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $2\cos C(a\cos B+b\cos A)=c$.

（1）求 C；

（2）若 $c=\sqrt{7}$，ΔABC 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，求 ΔABC 的周长.

19.（本小题满分 12 分）

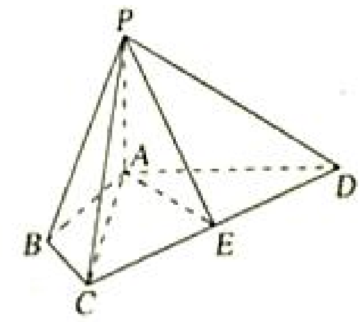
在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$2a_{n+1}=(1+\frac{1}{n})^2\cdot a_n$.

（1）证明数列 $\{\frac{a_n}{n^2}\}$ 是等比数列，并求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）令 $b_n=a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

20.（本小题满分 12 分）

如图所示，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=2$，$\angle ABC=90°$，$AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，$AD=2\sqrt{3}$，$CD=4$，E 为 CD 的中点.



（1）求证：$AE//$ 平面 PBC；

（2）求锐二面角 $B-PC-D$ 的余弦值.

21.（本小题满分 12 分）

已知抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$ 的焦点为 F，直线 $y=4$ 与 y 轴的交点为 P，与抛物线 C 的交点为 Q，且 $|QF|=2|PQ|$.

（1）求 p 的值；

（2）已知点 $T\left(t,-2\right)$ 为抛物线 C 上一点，M，N 是 C 上异于点 T 的两点，且满足直线 TM 和直线 TN 的斜率之和为 $-\frac{8}{3}$，证明：直线 MN 恒过定点，并求出定点的坐标.

22.（本小题满分 12 分）

设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$，$F_1,F_2$ 为左、右焦点，B 为短轴端点，且 $S_{\Delta BF_1F_2}=4$，离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，O 为坐标原点.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）是否存在圆心在原点的圆，使得该圆的任意一条切线与椭圆 C 恒有两个交点 M，N，且满足 $\left|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right|=\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|$？若存在，求出该圆的方程，若不存在，说明理由.

宜昌市一中高二上学期期末数学模拟卷答案

一、选择题

1．D　2．C　3．A　4．A　5．D　6．C　7．C　8．B　9．A　10．B
11．B　12．A

二、填空题

13．$3\sqrt{5}$　14．$\frac{\sqrt{10}}{5}$　15．$5<a\le 7$　16．4

三、解答题

17．解：若命题 p : 方程 $\frac{x^2}{2m}+\frac{y^2}{9-m}=1$ 表示焦点在y轴上的椭圆为真命题时，

则 $9-m>2m>0$，解得 $0<m<3$，则命题p为假命题时，$m\le 0$ 或 $m\ge 3$，………4 分

若命题 q : 双曲线 $\frac{y^2}{5}-\frac{x^2}{m}=1$ 的离心率 $e\in(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2})$ 为真命题时，

则 $\sqrt{\frac{5+m}{5}}\in(\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2})$，即 $\frac{5+m}{5}\in(\frac{3}{2},2)$，即 $\frac{5}{2}<m<5$ ………8 分

则命题q为假命题时，$m\le\frac{5}{2}$，或 $m\ge 5$，∵命题p、q中有且只有一个为真命题，

所以当p真q假时，$0<m\le\frac{5}{2}$，当p假q真时，$3\le m<5$，

综上所述，实数m的取值范围是：$0<m\le\frac{5}{2}$，或 $3\le m<5$．………10 分

18．解：(1) 由已知及正弦定理得，$2\cos C(\sin A\cos B+\sin B\cos A)=\sin C$，

$2\cos C\sin(A+B)=\sin C$，故 $2\sin C\cos C=\sin C$，可得 $\cos C=\frac{1}{2}$，

$\because C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$ ………6 分

(2) 由已知，得 $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，又 $C=\frac{\pi}{3}$，所以 $ab=6$，

由已知及余弦定理得，$a^2+b^2-2ab\cos C=7$，故 $a^2+b^2=13$，从而 $(a+b)^2=25$，

所以 ΔABC 的周长为 $5+\sqrt{7}$．………12 分

19．解：（1）由条件得 $\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n}{n^2}$，又 $n=1$ 时，$\frac{a_1}{1}=1$，

故数列 $\{\frac{a_n}{n^2}\}$ 构成首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列．从而 $\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{2^{n-1}}$，即 $a_n=\frac{n^2}{2^{n-1}}$．………5 分

（2）由 $b_n=\frac{(n+1)^2}{2^n}-\frac{n^2}{2^n}=\frac{2n+1}{2^n}$，………6 分　$S_n=\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n+1}{2^n}$，

$$\Rightarrow\frac{1}{2}S_n=\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\frac{2n+1}{2^{n+1}},$$

两式相减得：$\frac{1}{2}S_n=\frac{3}{2}+2(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n})-\frac{2n+1}{2^{n+1}}$，

所以 $S_n=5-\frac{2n+5}{2^n}$．　………12 分

20．【解】（1）证明：$\because AB=\sqrt{3}$，$BC=1$，$\angle ABC=90^\circ$，

$\therefore AC=2$，$\angle BCA=60^\circ$，

在 $\triangle ACD$ 中，$\because AD=2\sqrt{3}$，$AC=2$，$CD=4$，$\therefore AC^2+AD^2=CD^2$，

$\therefore\triangle ACD$ 是直角三角形，

又 E 为 CD 的中点，$\therefore AE=\frac{1}{2}CD=CE$，$\tan\angle ACD=\frac{AD}{AC}=\sqrt{3}$，

$\therefore\angle CAE=60^\circ$，$\therefore\triangle ACE$ 是等边三角形，$\therefore\angle CAE=60^\circ=\angle BCA$，$\therefore BC/\!/AE$，

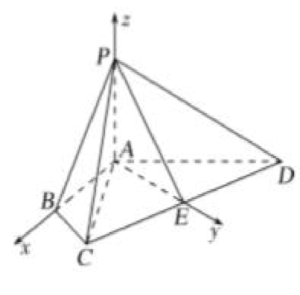
又 $AE\not\subset$ 平面 PBC，$BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore AE/\!/$ 平面 PBC．………6 分

（2）由（1）可知 $\angle BAE=90^\circ$，以点 A 为原点，以 AB，AE，AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $P(0,0,2)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$D(-\sqrt{3},3,0)$，$E(0,2,0)$，

$\therefore\overline{PB}=(\sqrt{3},0,-2)$，$\overline{PC}=(\sqrt{3},1,-2)$，$\overline{PD}=(-\sqrt{3},3,-2)$，$\overline{PE}=(0,2,-2)$，

设 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$ 为平面 PBC 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overline{PB}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overline{PC}=0\end{cases}$，



即$\begin{cases}\sqrt{3}x_1-2z_1=0\\ \sqrt{3}x_1+y_1-2z_1=0\end{cases}$，

令$x_1=1$，则$y_1=0$，$z_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\boldsymbol{n}=\left(1,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

设$\boldsymbol{m}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$为平面$PDC$的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overline{PE}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overline{PC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2y_2-2z_2=0\\ \sqrt{3}x_2+y_2-2z_2=0\end{cases}$，

令$y_2=1$，则$z_2=1$，$x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\boldsymbol{m}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1,1\right)$，

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\dfrac{7}{4}}\cdot\sqrt{\dfrac{7}{3}}}=\dfrac{5}{7}$，$\therefore$二面角$B-PC-D$的余弦值为$\dfrac{5}{7}$． ………12 分

21.【解】(1) 设$Q\left(x_0,4\right)$，由抛物线定义知$|QF|=x_0+\dfrac{p}{2}$，又$|QF|=2|PQ|$，$|PQ|=x_0$，

所以$2x_0=x_0+\dfrac{p}{2}$，解得$x_0=\dfrac{p}{2}$，将点$Q\left(\dfrac{p}{2},4\right)$代入抛物线方程，解得$p=4$……….5 分

（2）由（1）知，抛物线C的方程为$y^2=8x$，所以点T坐标为$\left(\dfrac{1}{2},-2\right)$，………6 分

设直线MN的方程为$x=my+n$，点$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，

由$\begin{cases}x=my+n\\ y^2=8x\end{cases}$ 得$y^2-8my-8n=0$，$\varDelta=64m^2+32n>0$．所以$y_1+y_2=8m$，$y_1y_2=-8n$，

所以$k_{MT}+k_{NT}=\dfrac{y_1+2}{x_1-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{y_2+2}{x_2-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{y_1+2}{\dfrac{y_1^2}{8}-\dfrac{1}{2}}+\dfrac{y_2+2}{\dfrac{y_2^2}{8}-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{8}{y_1-2}+\dfrac{8}{y_2-2}=\dfrac{8\left(y_1+y_2\right)-32}{y_1y_2-2\left(y_1+y_2\right)+4}$

$=\dfrac{64m-32}{-8n-16m+4}=-\dfrac{8}{3}$，解得$n=m-1$，………10 分

所以直线MN的方程为$x+1=m(y+1)$，恒过定点$\left(-1,-1\right)$．………12 分

22．解：（1）因为椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，由题意得

$S_{\Delta BF_1F_2}=\dfrac{1}{2}\times2c\times b=4$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$a^2=b^2+c^2$，解得$\begin{cases}a^2=8\\ b^2=4\end{cases}$

椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$………4 分

（2）假设存在圆心在原点的圆$x^2+y^2=r^2$，使得该圆的任意一条切线与椭圆C恒有两个交点M,N，因为$\left|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right|=\left|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}\right|$，所以有$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，设$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

当切线斜率存在时，设该圆的切线方程为$y=kx+m$，

解方程组$\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$得$x^2+2(kx+m)^2=8$，即$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-8=0$，

则△=$16k^2m^2-4(1+2k^2)(2m^2-8)=8(8k^2-m^2+4)>0$，即$8k^2-m^2+4>0$

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2},x_1x_2=\dfrac{2m^2-8}{1+2k^2}$;………6 分

$y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{k^2(2m^2-8)}{1+2k^2}-\dfrac{4k^2m^2}{1+2k^2}+m^2=\dfrac{m^2-8k^2}{1+2k^2}$

要使$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，需$x_1x_2+y_1y_2=0$，即$\dfrac{2m^2-8}{1+2k^2}+\dfrac{m^2-8k^2}{1+2k^2}=0$，………7 分

所以$3m^2-8k^2-8=0$，所以$k^2=\dfrac{3m^2-8}{8}\geq0$又$8k^2-m^2+4>0$，所以$\begin{cases}m^2>2\\ 3m^2\geq8\end{cases}$，

所以$m^2\geq\dfrac{8}{3}$，即$m\geq\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$或$m\leq-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$．因为直线$y=kx+m$为圆心在原点的圆的一条切线，

所以圆的半径为$r=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，$r^2=\dfrac{m^2}{1+k^2}=\dfrac{m^2}{1+\dfrac{3m^2-8}{8}}=\dfrac{8}{3}$，$r=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

所求的圆为$x^2+y^2=\dfrac{8}{3}$，此时圆的切线$y=kx+m$都满足$m\geq\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$或$m\leq-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，………10 分

而当切线的斜率不存在时切线为$x=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$与椭圆$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$的两个交点

为$(\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$或$(-\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3})$满足$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，

综上，存在圆心在原点的圆$x^2+y^2=\dfrac{8}{3}$满足条件．………12 分