绝密★启用前

2018年普通高等学校招生全国统一考试（浙江卷）

数　学

本试题卷分选择题和非选择题两部分。全卷共4页，选择题部分1至2页；非选择题部分3至4页。满分150分。考试用时120分钟。

考生注意：

1．答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填在试题卷和答题纸规定的位置上。

2．答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范作答，在本试题卷上的作答一律无效。

参考公式：

若事件 A，B 互斥，则 $P(A+B)=P(A)+P(B)$ 若事件 A，B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$ 若事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，则 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$ 台体的体积公式 $V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h$ 其中 S_1,S_2 分别表示台体的上、下底面积，h 表示台体的高	柱体的体积公式 $V=Sh$ 其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高 锥体的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$ 其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高 球的表面积公式 $S=4\pi R^2$ 球的体积公式 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ 其中 R 表示球的半径

选择题部分（共40分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3\}$，则 $\complement_U A=$（　　）

A. $\varnothing$　　B. $\{1,3\}$　　C. $\{2,4,5\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据补集的定义可得结果.

【详解】因为全集$U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3\}$，所以根据补集的定义得$\complement_U A=\{2,4,5\}$，故选C.

【点睛】若集合的元素已知，则求集合的交集、并集、补集时，可根据交集、并集、补集的定义求解.

2. 双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的焦点坐标是

A. $(-\sqrt{2},0)$，$(\sqrt{2},0)$　　B. $(-2,0)$，$(2,0)$

C. $(0,-\sqrt{2})$，$(0,\sqrt{2})$　　D. $(0,-2)$，$(0,2)$

【答案】B

【解析】

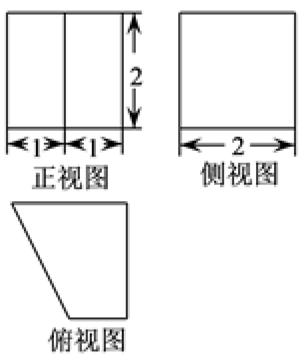
【分析】根据双曲线方程确定焦点位置，再根据$c^2=a^2+b^2$求焦点坐标.

【详解】因为双曲线方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1$，所以焦点坐标可设为$(\pm c,0)$，

因为$c^2=a^2+b^2=3+1=4,c=2$，所以焦点坐标为$(\pm 2,0)$，选B.

【点睛】由双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$可得焦点坐标为$(\pm c,0)(c=\sqrt{a^2+b^2})$，顶点坐标为$(\pm a,0)$，渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$.

3. 某几何体的三视图如图所示（单位：cm），则该几何体的体积（单位：cm^3）是（　　）



A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

【答案】C

【解析】

【分析】先还原几何体为一直四棱柱，再根据柱体体积公式求结果.

【详解】根据三视图可得几何体为一个直四棱柱，高为2，底面为直角梯形，上下底分别为1、2，梯形的高为2，因此几何体的体积为$\frac{1}{2}\times\left(1+2\right)\times 2\times 2=6$，选 C.

【点睛】先由几何体的三视图还原几何体的形状，再在具体几何体中求体积或表面积等.

4. 若复数$z=\frac{2}{1-\mathrm{i}}$，其中 i 为虚数单位，则$\overline{z}$ =

A. 1+i　　B. 1−i　　C. −1+i　　D. −1−i

【答案】B

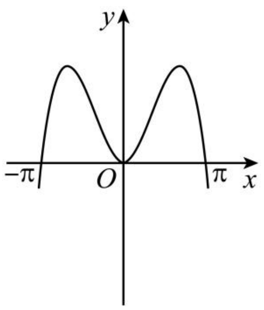
【解析】

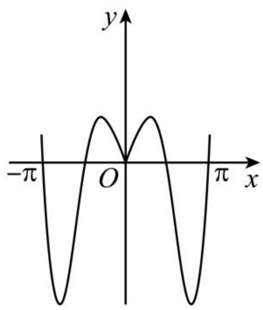
【详解】试题分析：$z=\frac{2}{1-\mathrm{i}}=\frac{2(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=1+\mathrm{i},\therefore \overline{z}=1-\mathrm{i}$，选 B.

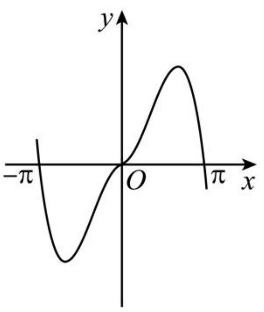
【考点】复数的运算，复数的概念

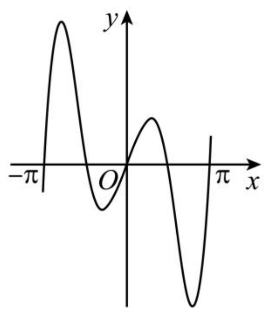
【名师点睛】本题主要考查复数的运算及复数的概念，是一道基础题目.从历年高考题目看，复数题目往往不难，一般考查复数运算与概念或复数的几何意义，也是考生必定得分的题目之一.

5. 函数 $y=2^{|x|}\sin 2x$ 的图象可能是

A.


B.


C.


D.


【答案】D

【解析】

【详解】分析:先研究函数的奇偶性，再研究函数在$(\frac{\pi}{2},\pi)$上的符号，即可判断选择.

详解：令$f(x)=2^{|x|}\sin 2x$，

因为 $x\in R, f(-x)=2^{|-x|}\sin 2(-x)=-2^{|x|}\sin 2x=-f(x)$，所以 $f(x)=2^{|x|}\sin 2x$ 为奇函数，排除选项 A,B;

因为 $x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 时， $f(x)<0$，所以排除选项 C，选 D.

点睛：有关函数图象的识别问题的常见题型及解题思路：（1）由函数的定义域，判断图象的左、右位置，由函数的值域，判断图象的上、下位置；（2）由函数的单调性，判断图象的变化趋势；（3）由函数的奇偶性，判断图象的对称性；（4）由函数的周期性，判断图象的循环往复.

6. 已知平面α，直线 m，n 满足 $m\not\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，则“$m\parallel n$”是“$m\parallel\alpha$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【详解】$m\not\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，所以当 $m//n$ 时，$m//\alpha$ 成立，即充分性成立；当 $m//\alpha$ 时，$m//n$ 不一定成立，可能是异面直线，故必要性不成立；所以 $m//n$ 是 $m//\alpha$ 的充分不必要条件，

故选：A

7. 设 $0<p<1$，随机变量 ξ 的分布列如图，则当 p 在 $(0,1)$ 内增大时，

ξ	0	1	2
P	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$

A. $D(\xi)$减小　　　　B. $D(\xi)$增大

C. $D(\xi)$先减小后增大　　　　D. $D(\xi)$先增大后减小

【答案】D

【解析】

【分析】先求数学期望，再求方差，最后根据方差函数确定单调性.

【详解】Q $E(\xi)=0\times\frac{1-p}{2}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{p}{2}=p+\frac{1}{2}$，

$\therefore D(\xi)=\frac{1-p}{2}(0-p-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}(1-p-\frac{1}{2})^2+\frac{p}{2}(2-p-\frac{1}{2})^2=-p^2+p+\frac{1}{4}$，

Q $\frac{1}{2}\in(0,1)$，$\therefore D(\xi)$ 先增后减，因此选 D.

【点睛】$E(\xi)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i,D(\xi)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(\xi))^2p_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-E^2(\xi).$

8. 已知四棱锥$S-ABCD$的底面是正方形，侧棱长均相等，E是线段AB上的点（不含端点），设SE与BC所成的角为θ_1，SE与平面$ABCD$所成的角为θ_2，二面角$S-AB-C$的平面角为θ_3，则

A. $\theta_1\le\theta_2\le\theta_3$　　B. $\theta_3\le\theta_2\le\theta_1$　　C. $\theta_1\le\theta_3\le\theta_2$　　D. $\theta_2\le\theta_3\le\theta_1$

【答案】D

【解析】

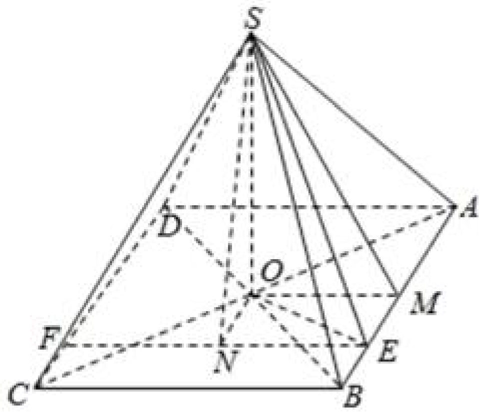
【分析】分别作出线线角、线面角以及二面角，再构造直角三角形，根据边的大小关系确定角的大小关系.

【详解】设O为正方形$ABCD$的中心，M为AB中点，过E作BC的平行线EF，交CD于F，过O作ON垂直EF于N，连接SO、SN、OM，则SO垂直于底面$ABCD$，OM垂直于AB，

因此$\angle SEN=\theta_1,\angle SEO=\theta_2,\angle SMO=\theta_3,$

从而$\tan\theta_1=\frac{SN}{EN}=\frac{SN}{OM},\tan\theta_2=\frac{SO}{EO},\tan\theta_3=\frac{SO}{OM},$

因为$SN\ge SO$，$EO\ge OM$，所以$\tan\theta_1\ge\tan\theta_3\ge\tan\theta_2$，即$\theta_1\ge\theta_3\ge\theta_2$，选D.



【点睛】线线角找平行，线面角找垂直，面面角找垂面.

9. 已知$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{e}$是平面向量，$\vec{e}$是单位向量. 若非零向量$\vec{a}$与$\vec{e}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，向量$\vec{b}$满足$\vec{b}^2-4\vec{e}\cdot\vec{b}+3=0$，则$|\vec{a}-\vec{b}|$的最小值是

A. $\sqrt{3}-1$　　B. $\sqrt{3}+1$　　C. 2　　D. $2-\sqrt{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】先确定向量$\vec{a}$、$\vec{b}$所表示的点的轨迹，一个为直线，一个为圆，再根据直线与圆的位置关系求最小

值.

【详解】设 $\vec{a}=(x,y),\vec{e}=(1,0),\vec{b}=(m,n)$，

则由 $\langle\vec{a},\vec{e}\rangle=\frac{\pi}{3}$ 得 $\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}|\cdot|\vec{e}|\cos\frac{\pi}{3},x=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},\therefore y=\pm\sqrt{3}x$，

由 $\vec{b}^2-4\vec{e}\cdot\vec{b}+3=0$ 得 $m^2+n^2-4m+3=0,(m-2)^2+n^2=1,$

因此，$|\vec{a}-\vec{b}|$ 的最小值为圆心 $(2,0)$ 到直线 $y=\pm\sqrt{3}x$ 的距离 $\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$ 减去半径 1，为 $\sqrt{3}-1$. 选 A.

【点睛】以向量为载体求相关变量的取值范围，是向量与函数、不等式、三角函数、曲线方程等相结合的一类综合问题.通过向量的坐标运算，将问题转化为解方程、解不等式、求函数值域或直线与曲线的位置关系，是解决这类问题的一般方法.

10. 已知 a_1,a_2,a_3,a_4 成等比数列，且 $a_1+a_2+a_3+a_4=\ln(a_1+a_2+a_3)$ ．若 $a_1>1$，则

A. $a_1<a_3,a_2<a_4$　　B. $a_1>a_3,a_2<a_4$　　C. $a_1<a_3,a_2>a_4$　　D. $a_1>a_3,a_2>a_4$

【答案】B

【解析】

【分析】先证不等式 $x\ge\ln x+1$，再确定公比的取值范围，进而作出判断.

【详解】令 $f(x)=x-\ln x-1,$ 则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$，令 $f'(x)=0,$ 得 $x=1$，所以当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，因此 $f(x)\ge f(1)=0,\therefore x\ge\ln x+1$，

若公比 $q>0$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4>a_1+a_2+a_3>\ln(a_1+a_2+a_3)$，不合题意；

若公比 $q\le-1$，则 $a_1+a_2+a_3+a_4=a_1(1+q)(1+q^2)\le0,$

但 $\ln(a_1+a_2+a_3)=\ln[a_1(1+q+q^2)]>\ln a_1>0$，

即 $a_1+a_2+a_3+a_4\le0<\ln(a_1+a_2+a_3)$，不合题意；

因此 $-1<q<0,q^2\in(0,1)$，

$\therefore a_1>a_1q^2=a_3,a_2<a_2q^2=a_4<0$，选 B.

【点睛】构造函数对不等式进行放缩，进而限制参数取值范围，是一个有效方法.如 $x\ge\ln x+1,$ $e^x\ge x+1,e^x\ge x^2+1(x\ge0).$

非选择题部分（共 110 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11. 我国古代数学著作《张邱建算经》中记载百鸡问题：“今有鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三；鸡雏三，值钱一，凡百钱，买鸡百只，问鸡翁、母、雏各几何？”设鸡翁，鸡母，鸡雏个数分别为x，y，z，则 $\begin{cases} x+y+z=100, \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100, \end{cases}$ 当$z=81$时，$x=$__________，$y=$__________.

【答案】　①. 8　②. 11

【解析】

【分析】将z代入解方程组可得x、y值.

【详解】$\because z=81, \therefore \begin{cases} x+y=19 \\ 5x+3y=73 \end{cases}, \therefore \begin{cases} x=8 \\ y=11 \end{cases}$.

【点睛】实际问题数学化，利用所学的知识将陌生的性质转化为我们熟悉的性质，是解决这类问题的突破口.

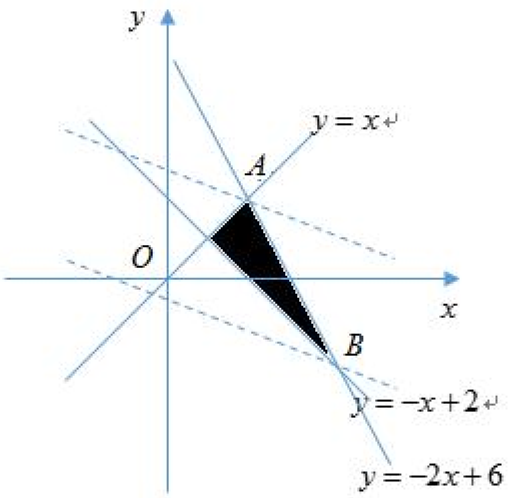
12. 若x,y满足约束条件$\begin{cases} x-y\geq 0, \\ 2x+y\leq 6, \\ x+y\geq 2, \end{cases}$则$z=x+3y$的最小值是__________，最大值是__________.

【答案】　①. -2　②. 8

【解析】

【分析】先作可行域，再平移目标函数对应的直线，从而确定最值.

【详解】作可行域，如图中阴影部分所示，则直线$z=x+3y$过点$A(2,2)$时z取最大值$z_{\max}=2+3\times 2=8$，过点$B(4,-2)$时z取最小值$z_{\min}=4+3\times(-2)=-2$.



【点睛】线性规划的实质是把代数问题几何化，即用数形结合的思想解题.需要注意的是：一，准确无误地

作出可行域；二，画目标函数所对应的直线时，要注意与约束条件中的直线的斜率进行比较，避免出错；三，一般情况下，目标函数的最大或最小值会在可行域的端点或边界处取得.

13. 在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．若 $a=\sqrt{7}$，b=2，A=60°，则 sin B=___________，c=___________.

【答案】 ①. $\frac{\sqrt{21}}{7}$ ②. 3

【解析】

【详解】分析:根据正弦定理得 $sinB$,根据余弦定理解出 c.

详解：由正弦定理得 $\frac{a}{b}=\frac{sinA}{sinB}$,所以 $sinB=\frac{2}{\sqrt{7}}\times sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{21}}{7}$,

由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bccosA,\therefore 7=4+c^2-2c,\therefore c=3$（负值舍去）.

点睛：解三角形问题，多为边和角的求值问题，这就需要根据正、余弦定理结合已知条件灵活转化为边和角之间的关系，从而达到解决问题的目的.

14. 二项式 $(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2x})^8$ 的展开式的常数项是___________.

【答案】7

【解析】

【详解】分析:先根据二项式展开式的通项公式写出第 r+1 项，再根据项的次数为零解得 r，代入即得结果.

详解：二项式 $(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2x})^8$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_8^r(\sqrt[3]{x})^{8-r}(\frac{1}{2x})^r=C_8^r\cdot\frac{1}{2^r}\cdot x^{\frac{8-4r}{3}}$，

令 $\frac{8-4r}{3}=0$ 得 $r=2$，故所求的常数项为 $C_8^2\cdot\frac{1}{2^2}$=7.

点睛：求二项展开式有关问题的常见类型及解题策略：

(1)求展开式中的特定项.可依据条件写出第 $r+1$ 项，再由特定项的特点求出 r 值即可.

(2)已知展开式的某项，求特定项的系数.可由某项得出参数的值，再由通项写出第 $r+1$ 项，由特定项得出 r 值，最后求出特定项的系数.

15. 已知$\lambda\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)$=$\begin{cases}x-4,x\geq\lambda\\x^2-4x+3,x<\lambda\end{cases}$，当$\lambda$=2 时，不等式 $f(x)$<0 的解集是___________．若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点，则λ的取值范围是___________.

【答案】 ①. (1, 4) ②. $(1,3]\cup(4,+\infty)$

【解析】

【详解】分析:根据分段函数，转化为两个不等式组，分别求解，最后求并集.先讨论一次函数零点的取法，再对应确定二次函数零点的取法，即得参数λ的取值范围.

详解：由题意得$\begin{cases} x\geq 2 \\ x-4<0 \end{cases}$或$\begin{cases} x<2 \\ x^2-4x+3<0 \end{cases}$，所以$2\leq x<4$或$1<x<2$，即$1<x<4$，不等式$f(x)<0$的解集是$(1,4)$,

当$\lambda>4$时，$f(x)=x-4>0$，此时$f(x)=x^2-4x+3=0, x=1,3$，即在$(-\infty,\lambda)$上有两个零点；当$\lambda\leq 4$时，$f(x)=x-4=0, x=4$，由$f(x)=x^2-4x+3$在$(-\infty,\lambda)$上只能有一个零点得$1<\lambda\leq 3$.综上，λ的取值范围为$(1,3]\cup(4,+\infty)$.

点睛：已知函数有零点求参数取值范围常用的方法和思路：

(1)直接法：直接根据题设条件构建关于参数的不等式，再通过解不等式确定参数范围；

(2)分离参数法：先将参数分离，转化成求函数值域问题加以解决；

(3)数形结合法：先对解析式变形，在同一平面直角坐标系中，画出函数的图象，然后数形结合求解.

16. 从1，3，5，7，9中任取2个数字，从0，2，4，6中任取2个数字，一共可以组成__________个没有重复数字的四位数.(用数字作答)

【答案】1260.

【解析】

【详解】分析:按是否取零分类讨论，若取零，则先排首位，最后根据分类与分步计数原理计数.

详解：若不取零，则排列数为$C_5^2C_3^2A_4^4$,若取零，则排列数为$C_5^2C_3^1A_3^1A_3^3$,

因此一共有$C_5^2C_3^2A_4^4+C_5^2C_3^1A_3^1A_3^3=1260$个没有重复数字的四位数.

点睛：求解排列、组合问题常用的解题方法：

(1)元素相邻的排列问题——“捆邦法”；(2)元素相间的排列问题——“插空法”；(3)元素有顺序限制的排列问题——“除序法”；(4)带有“含”与“不含”“至多”“至少”的排列组合问题——间接法.

17. 已知点$P(0,1)$，椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=m$ $(m>1)$上两点A，B满足$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，则当$m$=__________时，点$B$横坐标的绝对值最大.

【答案】5

【解析】

【分析】方法一：先根据条件得到A,B坐标间的关系，代入椭圆方程解得B的纵坐标，即得B的横坐标关于m的函数关系，最后根据二次函数性质确定最值即可解出.

【详解】[方法一]：点差法＋二次函数性质

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$ 得 $-x_1=2x_2,1-y_1=2(y_2-1),\therefore -y_1=2y_2-3,$

因为 A,B 在椭圆上,所以 $\frac{x_1^{\ 2}}{4}+y_1^2=m,\frac{x_2^{\ 2}}{4}+y_2^2=m$， $\therefore \frac{4x_2^{\ 2}}{4}+(2y_2-3)^2=m$，即 $\frac{x_2^{\ 2}}{4}+(y_2-\frac{3}{2})^2=\frac{m}{4}$，

与 $\frac{x_2^{\ 2}}{4}+y_2^2=m$ 相减得： $y_2=\frac{3+m}{4}$，所以，

$x_2^2=-\frac{1}{4}(m^2-10m+9)=-\frac{1}{4}\left(m-5\right)^2+4\le 4$，当且仅当 $m=5$ 时取最等号，即 $m=5$ 时，点 B 横坐标的绝对值最大.

故答案为：5．

[方法二]：【通性通法】设线＋韦达定理

由条件知直线 AB 的斜率存在，设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，直线 AB 的方程为 $y=kx+1(k\ne 0)$，联立

$\begin{cases}y=kx+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=m,\end{cases}$ 得 $\left(4k^2+1\right)x^2+8kx+4-4m=0$，根据韦达定理得 $x_1+x_2=-\frac{8k}{4k^2+1}$，由 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$ 知

$x_1=-2x_2$，代入上式解得 $x_2=\frac{8k}{4k^2+1}$，所以 $\left|x_2\right|=\frac{8|k|}{4k^2+1}=\frac{8}{4|k|+\frac{1}{|k|}}\le\frac{8}{2\sqrt{4}}=2$．此时 $k^2=\frac{1}{4}$，又

$x_1x_2=\frac{4-4m}{4k^2+1}=-2x_2^2=-8$，解得 $m=5$.

[方法三]：直线的参数方程+基本不等式

设直线 AB 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$ 其中 t 为参数，α 为直线 AB 的倾斜角，将其代入椭圆方程中化简

得 $\left(1+3\sin^2\alpha\right)t^2+8t\sin\alpha+4-4m=0$，设点 A，B 对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1=-2t_2$．由韦达定理

知 $t_1+t_2=-\frac{8\sin\alpha}{1+3\sin^2\alpha},t_1t_2=\frac{4-4m}{1+3\sin^2\alpha}$，解得 $t_2=\frac{8\sin\alpha}{1+3\sin^2\alpha}$，所以

$$x_2^2=t_2^2\cos^2\alpha=\frac{64\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\left(1+3\sin^2\alpha\right)^2}=16\times\frac{\cos^2\alpha}{1+3\sin^2\alpha}\cdot\frac{4\sin^2\alpha}{1+3\sin^2\alpha}\le 16\times\left(\frac{\frac{\cos^2\alpha}{1+3\sin^2\alpha}+\frac{4\sin^2\alpha}{1+3\sin^2\alpha}}{2}\right)^2=4,$$

此时 $\cos^2\alpha=4\sin^2\alpha$，即 $\cos^2\alpha=\frac{4}{5},\sin^2\alpha=\frac{1}{5},t_2^2=5$，代入 $t_1=-2t_2,t_1t_2=\frac{4-4m}{1+3\sin^2\alpha}$，解得 $m=5$.

[方法四]：直接硬算求解+二次函数性质

设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，因为 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，所以 $\left(-x_1,1-y_1\right)=2\left(x_2,y_2-1\right)$.

即 $x_1=-2x_2$ ①，$y_1+2y_2=3$ ②，

又因为 $\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=m,\frac{x_2^2}{4}+y_2^2=m$，所以 $\frac{4x_2^2}{4}+y_1^2=m$.

不妨设 $y_2>0$，因此 $\left|y_1\right|=\sqrt{m-x_2^2},y_2=\sqrt{m-\frac{x_2^2}{4}}$，代入②式可得 $\left(\sqrt{m-x_2^2}\right)^2=\left(3-\sqrt{4m-x_2^2}\right)^2$. 化简

整理得 $4x_2^2=-m^2+10m-9=-(m-5)^2+16$.

由此可知，当 $m=5$ 时，上式有最大值 16，即点 B 横坐标的绝对值有最大值 2.

所以 $m=5$.

[方法五]：【最优解】仿射变换

如图 1，作如下仿射变换 $\begin{cases}x=2x_1\\y=y_1\end{cases}$，则 $x_1^2+y_1^2=m(m>1)$ 为一个圆.

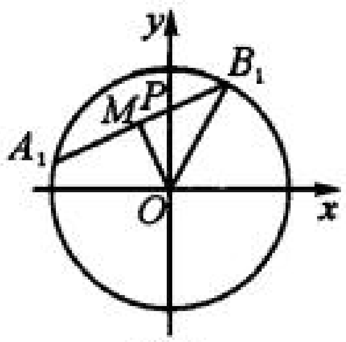


图 1

根据仿射变换的性质，点 B 的横坐标的绝对值最大，等价于点 B_1 的横坐标的绝对值最大，则

$$\left|x_{B_1}\right|=\left|PB_1\right|\cos\angle POM=2|PM|\cos\angle POM=2|OP|\sin\angle POM\cos\angle POM$$

$$=|OP|\cdot\sin 2\angle POM\le|OP|.$$

当 $\angle POM=\frac{\pi}{4}$ 时等号成立，根据 $|OP|=1$ 易得 $\left|OB_1\right|=\sqrt{5}$，此时 $m=5$.

[方法六]：中点弦性质的应用

设 $B\left(x_2,y_2\right)$，由 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$ 可知 $A\left(-2x_2,3-2y_2\right)$，则 AB 中点 $M\left(-\frac{x_2}{2},\frac{3-y_2}{2}\right)$. 因为 $k_{AB}\cdot k_{CM}=-\frac{b^2}{a^2}$，

所以 $\frac{3-y_2}{x_2}\cdot\frac{y_2-1}{x_2}=-\frac{1}{4}$，整理得 $\frac{x_2^2}{4}+\left(y_2-2\right)^2=1$，由于 $\left|x_2\right|\le 2$，则 $\left|x_2\right|_{\max}=2$ 时，$y_2=2$，所以

$m=\frac{4}{4}+4=5$.

【整体点评】方法一：由题意中点 A,B 的坐标关系，以及点差法可求出点 B 的横、纵坐标，从而可以根据二次函数的性质解出；

方法二：常规设线，通过联立，根据韦达定理以及题目条件求出点 B 的横坐标，然后利用基本不等式求出最值，由取等条件得解，是该题的通性通法；

方法三：利用直线的参数方程与椭圆方程联立，根据参数的几何意义，解得点 B 的横坐标，再利用基本不等式求出最值，由取等条件得解；

方法四：利用题目条件硬算求出点 B 的横坐标，再根据二次函数的性质解出；

方法五：根据仿射变换，利用圆的几何性质结合平面几何知识转化，求出对应点的横坐标的绝对值最大，从而解出，计算难度小，是该题的最优解；

方法六：利用中点弦的性质找出点 B 的横、纵坐标关系，再根据关系式自身特征求出点 B 的横坐标的绝对值的最大值，从而解出，计算量小，也是不错的方法.

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. 已知角α的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，它的终边过点 P（$-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}$）.

（Ⅰ）求 $\sin(\alpha+\pi)$ 的值；

（II）若角β满足 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$，求 $\cos\beta$的值.

【答案】(I) $\frac{4}{5}$；(II) $-\frac{56}{65}$ 或 $\frac{16}{65}$.

【解析】

【分析】分析：(Ⅰ) 先根据三角函数定义得 $\sin\alpha$，再根据诱导公式得结果，(Ⅱ) 先根据三角函数定义得 $\cos\alpha$，再根据同角三角函数关系得 $\cos(\alpha+\beta)$，最后根据 $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$，利用两角差的余弦公式求结果.

【详解】详解：(Ⅰ) 由角 α 的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$ 得 $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$，

所以 $\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

(Ⅱ) 由角 α 的终边过点 $P\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$ 得 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，

由 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}$ 得 $\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{12}{13}$.

由 $\beta=(\alpha+\beta)-\alpha$ 得 $\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha$，

所以$\cos\beta=-\frac{56}{65}$或$\cos\beta=\frac{16}{65}$.

点睛：三角函数求值的两种类型

(1)给角求值：关键是正确选用公式，以便把非特殊角的三角函数转化为特殊角的三角函数.

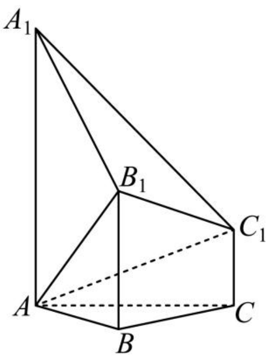
(2)给值求值：关键是找出已知式与待求式之间的联系及函数的差异.

①一般可以适当变换已知式，求得另外函数式的值，以备应用；

②变换待求式，便于将已知式求得的函数值代入，从而达到解题的目的.

19. 如图，已知多面体$ABC-A_1B_1C_1, A_1A, B_1B, C_1C$均垂直于平面

$ABC, \angle ABC=120°, A_1A=4, C_1C=1, AB=BC=B_1B=2$.



（I）求证：$AB_1\perp$平面$A_1B_1C_1$；

（II）求直线AC_1与平面ABB_1所成角的正弦值.

【答案】（I）证明见解析；（II）$\frac{\sqrt{39}}{13}$.

【解析】

【分析】（I）方法一：通过计算，根据勾股定理得$AB_1\perp A_1B_1, AB_1\perp B_1C_1$,再根据线面垂直的判定定理得结论；

（II）方法一：找出直线AC_1与平面ABB_1所成的角，再在直角三角形中求解即可.

【详解】（I）**[方法一]：几何法**

由$AB=2, AA_1=4, BB_1=2, AA_1\perp AB, BB_1\perp AB$得$AB_1=A_1B_1=2\sqrt{2}$，

所以$A_1B_1^2+AB_1^2=AA_1^2$，即有$AB_1\perp A_1B_1$.

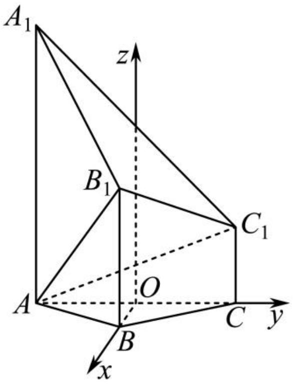
由$BC=2$，$BB_1=2, CC_1=1, BB_1\perp BC, CC_1\perp BC$得$B_1C_1=\sqrt{5}$，

由 $AB = BC = 2, \angle ABC = 120°$ 得 $AC = 2\sqrt{3}$，

由 $CC_1 \perp AC$，得 $AC_1 = \sqrt{13}$，所以 $AB_1^2 + B_1C_1^2 = AC_1^2$，即有 $AB_1 \perp B_1C_1$，又 $A_1B_1 \cap B_1C_1 = B_1$，因此 $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

［方法二］：向量法

如图，以 AC 的中点 O 为原点，分别以射线 OB，OC 为 x，y 轴的正半轴，建立空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$.



由题意知各点坐标如下：

$A\left(0,-\sqrt{3},0\right), B\left(1,0,0\right), A_1\left(0,-\sqrt{3},4\right), B_1\left(1,0,2\right), C_1\left(0,\sqrt{3},1\right)$,

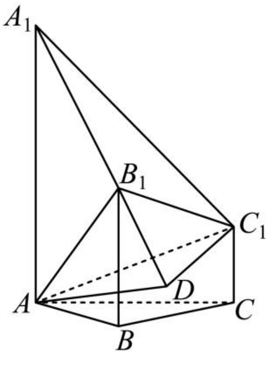
因此 $\overrightarrow{AB_1} = (1,\sqrt{3},2), \overrightarrow{A_1B_1} = (1,\sqrt{3},-2), \overrightarrow{A_1C_1} = (0,2\sqrt{3},-3)$，

由 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0$ 得 $AB_1 \perp A_1B_1$；由 $\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0$ 得 $AB_1 \perp A_1C_1$，

所以 $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

（II）**［方法一］：定义法**

如图，过点 C_1 作 $C_1D \perp A_1B_1$，交直线 A_1B_1 于点 D，连结 AD.



由 $AB_1 \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$ 得平面 $A_1B_1C_1 \perp$ 平面 ABB_1，

由 $C_1D \perp A_1B_1$ 得 $C_1D \perp$ 平面 ABB_1，

所以$\angle C_1AD$是AC_1与平面ABB_1所成的角.

由$B_1C_1=\sqrt{5},A_1B_1=2\sqrt{2},A_1C_1=\sqrt{21}$得$\cos\angle C_1A_1B_1=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}},\sin\angle C_1A_1B_1=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，

所以$C_1D=\sqrt{3}$，故$\sin\angle C_1AD=\dfrac{C_1D}{AC_1}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

因此，直线AC_1与平面ABB_1所成的角的正弦值是$\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

［方法二］：向量法

设直线AC_1与平面ABB_1所成的角为θ.

由(I)可知$\overrightarrow{AC_1}=(0,2\sqrt{3},1),\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0),\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$，

设平面ABB_1的法向量$\vec{n}=(x,y,z)$.

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\end{cases}$即$\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0\\ 2z=0\end{cases}$，可取$\vec{n}=(-\sqrt{3},1,0)$，

所以$\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AC_1},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{AC_1}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AC_1}\right|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

因此，直线AC_1与平面ABB_1所成的角的正弦值是$\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

［方法三］：【最优解】定义法+等积法

设直线AC_1与平面ABB_1所成角为θ，点C_1到平面ABB_1距离为d（下同）. 因为$C_1C//$平面ABB_1，所以点C到平面ABB_1的距离等于点C_1到平面ABB_1的距离. 由条件易得，点C到平面ABB_1的距离等于点C到直线AB的距离，而点C到直线AB的距离为$\sqrt{3}$，所以$d=\sqrt{3}$. 故$\sin\theta=\dfrac{d}{AC_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$.

［方法四］：定义法+等积法

设直线AC_1与平面ABB_1所成的角为θ，由条件易得$A_1B_1=2\sqrt{2},B_1C_1=\sqrt{5},A_1C_1=\sqrt{21}$，所以

$\cos\angle A_1B_1C_1=\dfrac{A_1B_1^2+B_1C_1^2-A_1C_1^2}{2A_1B_1\cdot B_1C_1}=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，因此$\sin\angle A_1B_1C_1=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

于是得$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{2}A_1B_1\cdot B_1C_1\cdot\sin\angle A_1B_1C_1=\sqrt{6}$，易得$S_{\triangle AA_1B_1}=4$.

由 $V_{C_1-AA_1B_1}=V_{A-A_1B_1C_1}$ 得 $\frac{1}{3}S_{\triangle AA_1B_1}\cdot d=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1C_1}\cdot AB_1$，解得 $d=\sqrt{3}$.

故 $\sin\theta=\frac{d}{AC_1}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{39}}{13}$.

［方法五］：三正弦定理的应用

设直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角为 θ，易知二面角 C_1-AA_1-B 的平面角为 $\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，易得

$\sin\angle C_1AA_1=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$，

所以由三正弦定理得 $\sin\theta=\sin\angle C_1AA_1\cdot\sin\angle BAC=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{39}}{13}$.

［方法六］：三余弦定理的应用

设直线 AC_1 与平面 ABB_1 所成的角为 θ，如图 2，过点 C 作 $CG\perp AB$，垂足为 G，易得 $CG\perp$ 平面 ABB_1，

所以 $\overrightarrow{CG}$ 可看作平面 ABB_1 的一个法向量.

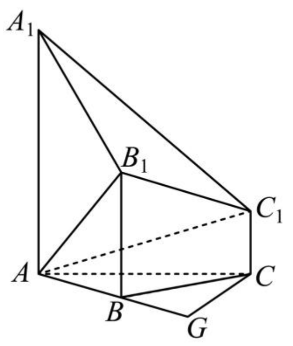


图2

结合三余弦定理得 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\overrightarrow{CG}\rangle\right|=\left|\cos\angle C_1AC\cdot\cos\angle GCA\right|=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\times\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{39}}{13}$.

［方法七］：转化法＋定义法

如图 3，延长线段 A_1A 至 E，使得 $AE=C_1C$.

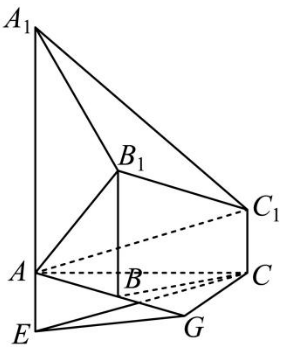


图3

联结CE，易得$EC // AC_1$，所以AC_1与平面ABB_1所成角等于直线EC与平面ABB_1所成角．过点C作$CG \perp AB$，垂足为G，联结GE，易得$CG \perp$平面ABB_1，因此EG为EC在平面ABB_1上的射影，所以$\angle CEG$为直线EC与平面ABB_1所成的角．易得$CE=\sqrt{13}$，$CG=\sqrt{3}$，因此$\sin\angle CEG=\dfrac{CG}{CE}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$．

［方法八］：定义法＋等积法

如图4，延长A_1B_1, AB交于点E，易知$BE=2$，又$AB=BC=2$，所以$AC \perp CE$，故$CE \perp$面AA_1C_1C．设点C_1到平面ABB_1的距离为h，由$V_{E-AA_1C_1}=V_{C_1-AA_1E}$得$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}AA_1\cdot AE\cdot h=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}AA_1\cdot AC\cdot CE$，解得$h=\sqrt{3}$．

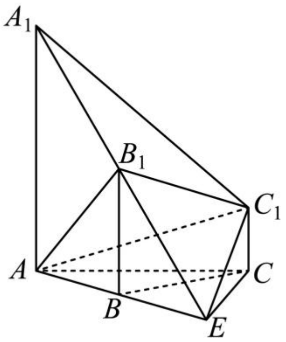


图4

又$AC_1=\sqrt{13}$，设直线AC_1与平面ABB_1所成角为θ，所以$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{13}}=\dfrac{\sqrt{39}}{13}$．

【整体点评】（I）方法一：通过线面垂直的判定定理证出，是该题的通性通法；

方法二： 通过建系，根据数量积为零，证出；

（II）方法一：根据线面角的定义以及几何法求线面角的步骤，“一作二证三计算”解出；

方法二：根据线面角的向量公式求出；

方法三：根据线面角的定义以及计算公式，由等积法求出点面距，即可求出，该法是本题的最优解；

方法四：基本解题思想同方法三，只是求点面距的方式不同；

方法五：直接利用三正弦定理求出；

方法六：直接利用三余弦定理求出；

方法七：通过直线平移，利用等价转化思想和线面角的定义解出；

方法八：通过等价转化以及线面角的定义，计算公式，由等积法求出点面距，即求出．

20. 已知等比数列$\{a_n\}$的公比 $q>1$，且 $a_3+a_4+a_5=28$，a_4+2 是 a_3，a_5 的等差中项．数列$\{b_n\}$满足 $b_1=1$，数列$\{(b_{n+1}-b_n)a_n\}$的前 n 项和为 $2n^2+n$．

（Ⅰ）求 q 的值；

（Ⅱ）求数列$\{b_n\}$的通项公式．

【答案】(I) $q=2$；(II) $b_n=15-(4n+3)\cdot(\frac{1}{2})^{n-2}$.

【解析】

【分析】分析:（Ⅰ）根据条件、等差数列的性质及等比数列的通项公式即可求解公比;（Ⅱ）先根据数列$\{(b_{n+1}-b_n)a_n\}$前 n 项和求通项，解得 $b_{n+1}-b_n$，再通过叠加法以及错位相减法求 b_n.

【详解】详解:（Ⅰ）由 a_4+2 是 a_3,a_5 的等差中项得 $a_3+a_5=2a_4+4$，

所以 $a_3+a_4+a_5=3a_4+4=28$，

解得 $a_4=8$.

由 $a_3+a_5=20$ 得 $8\left(q+\frac{1}{q}\right)=20$，

因为 $q>1$，所以 $q=2$.

（Ⅱ）设 $c_n=(b_{n+1}-b_n)a_n$，数列$\{c_n\}$前 n 项和为 S_n.

由 $c_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geq 2.\end{cases}$ 解得 $c_n=4n-1$.

由（Ⅰ）可知 $a_n=2^{n-1}$，

所以 $b_{n+1}-b_n=(4n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

故 $b_n-b_{n-1}=(4n-5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},n\geq 2$，

$b_n-b_1=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_3-b_2)+(b_2-b_1)$

$=(4n-5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+(4n-9)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}+\cdots+7\cdot\frac{1}{2}+3$.

设 $T_n=3+7\cdot\frac{1}{2}+11\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(4n-5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},n\geq 2$，

$\frac{1}{2}T_n=3\cdot\frac{1}{2}+7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+(4n-9)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}+(4n-5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

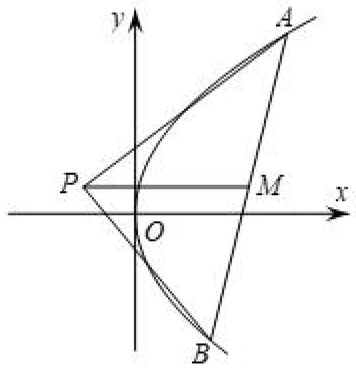
所以 $\frac{1}{2}T_n=3+4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-(4n-5)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，

因此 $T_n=14-(4n+3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},n\geq 2$，

又 $b_1=1$，所以 $b_n=15-(4n+3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

点睛：用错位相减法求和应注意的问题：(1)要善于识别题目类型，特别是等比数列公比为负数的情形；(2)在写出“S_n”与“qS_n”的表达式时应特别注意将两式“错项对齐”以便下一步准确写出“S_n-qS_n”的表达式；(3)在应用错位相减法求和时，若等比数列的公比为参数，应分公比等于 1 和不等于 1 两种情况求解.

21. 如图，已知点 P 是 y 轴左侧(不含 y 轴)一点，抛物线 C：$y^2=4x$ 上存在不同的两点 A，B 满足 PA，PB 的中点均在 C 上.



（I）设 AB 中点为 M，证明：PM 垂直于 y 轴；

（II）若 P 是半椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1(x<0)$ 上的动点，求△PAB 面积的取值范围.

【答案】（I）证明见解析；（II）$\left[6\sqrt{2},\frac{15\sqrt{10}}{4}\right]$.

【解析】

【分析】（I）方法一：设 P,A,B 的纵坐标分别为 y_0，y_1,y_2，根据中点坐标公式得 PA,PB 的中点坐标，代入抛物线方程，可得 $y_1+y_2=2y_0$，即得结论；

（II）方法一：由（I）可得△PAB 面积为 $\frac{1}{2}|PM||y_1-y_2|$，利用根与系数的关系可表示 $|PM|,|y_1-y_2|$ 为 y_0 的函数，根据半椭圆范围以及二次函数性质确定面积取值范围.

【详解】（I）［方法一］：【通性通法】点参法

设 $P\left(x_0,y_0\right)$，$A\left(\frac{1}{4}y_1^2,y_1\right)$，$B\left(\frac{1}{4}y_2^2,y_2\right)$.

因为 PA，PB 的中点在抛物线上，所以 y_1，y_2 为方程

$\left(\frac{y+y_0}{2}\right)^2=4\cdot\frac{\frac{1}{4}y^2+x_0}{2}$，即 $y^2-2y_0y+8x_0-y_0^2=0$ 的两个不同的实数根.

所以 $y_1+y_2=2y_0$．即点 M 的纵坐标为 $\frac{y_1+y_2}{2}=y_0$，因此，PM 垂直于 y 轴.

［方法二］：常规设线＋中位线定理

设 PA,PB 的中点分别为 E，F，EF 交 PM 于 N，设 $P\left(x_0,y_0\right),A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，

设直线 $AB:x=my+n,EF:x=my+n'$.

则由 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+n\end{cases}\Rightarrow y^2-4my-4n=0\Rightarrow y_M=\frac{y_1+y_2}{2}=2m$.

同理可得 $y_N=2m$，即 $MN\,//\,x$ 轴，得证.

［方法三］：抛物线的平行弦性质

设线段 PA,PB 的中点为 D，E，线段 DE 的中点为 N.

易得直线 MN 过点 P，事实上，直线 MN 是抛物线平行弦的中点轨迹所在直线.

由“抛物线平行弦的轨迹为平行或重合于抛物线对称轴的射线”可知，PM 垂直于 y 轴.

（II）［方法一］：【通性通法】点参法

由（I）可知 $\begin{cases}y_1+y_2=2y_0\\y_1y_2=8x_0-y_0^2\end{cases}$，

所以 $|PM|=\frac{1}{8}\left(y_1^2+y_2^2\right)-x_0=\frac{3}{4}y_0^2-3x_0$，$|y_1-y_2|=2\sqrt{2\left(y_0^2-4x_0\right)}$.

因此，$\triangle PAB$ 的面积 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|PM|\cdot|y_1-y_2|=\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(y_0^2-4x_0\right)^{\frac{3}{2}}$.

因为 $x_0^2+\frac{y_0^2}{4}=1(x_0<0)$，所以 $y_0^2-4x_0=-4x_0^2-4x_0+4\in[4,5]$.

因此，$\triangle PAB$ 面积的取值范围是 $\left[6\sqrt{2},\frac{15\sqrt{10}}{4}\right]$.

［方法二］：椭圆的参数方程＋抛物线中点弦性质

设线段 PA,PB 的中点分别为 D，E，线段 DE 的中点为 N.

设 $P(\cos\alpha,2\sin\alpha),\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，则 $M\left(x_M,2\sin\alpha\right)$，$N\left(x_N,2\sin\alpha\right)$.

由抛物线弦中点性质，可设直线 $AB:x=y\sin\alpha+m,DE:x=y\sin\alpha+n$.

联立直线与抛物线方程易得 $|AB|=\sqrt{1+\sin^2\alpha}\cdot\sqrt{16\sin^2\alpha+16m}$，$|DE|=\sqrt{1+\sin^2\alpha}\cdot\sqrt{16\sin^2\alpha+16n}$，

由 $|AB|=2|DE|$ 得，$m=3\sin^2\alpha+4n$.

由点 N 为线段 PM 的中点可得 $m=2\sin^2\alpha-\cos\alpha+2n$.

于是有 $n=-\frac{1}{2}\left(\sin^2\alpha+\cos\alpha\right)$.

从而 $\triangle PAB$ 面积 $S_{\triangle PAB}=4S_{\triangle PDE}=4\times\frac{1}{2}|PN|\cdot\left|y_D-y_E\right|$

$$=2\times\left|\frac{3}{2}\sin^2\alpha-\frac{3}{2}\cos\alpha\right|\times4\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sin^2\alpha-\cos\alpha\right)}=6\sqrt{2}\times\left[\frac{5}{4}-\left(\cos\alpha+\frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

而 $-1\le\cos\alpha<0$，因此 $S_{\triangle PAB}\in\left[6\sqrt{2},\frac{15\sqrt{10}}{4}\right]$.

［方法三］：反设直线

设直线 $AB:x=my+t,P\left(x_0,y_0\right),A\left(\frac{y_1^2}{4},y_1\right),B\left(\frac{y_2^2}{4},y_2\right)$.

由 $\begin{cases}x=my+t\\y^2=4x\end{cases}$ 得关于 y 的方程 $y^2-4my-4t=0$ 的两个不同的根分别为 y_1,y_2，于是由韦达定理得

$\begin{cases}y_1+y_2=4m\\y_1\cdot y_2=-4t\end{cases}$，所以 $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=2m$.

又 $x_0^2+\frac{y_0^2}{4}=1\left(x_0<0\right)$，所以 $x_0=-\sqrt{1-\frac{y_0^2}{4}}=-\sqrt{1-m^2}$.

由①知 $y_1\cdot y_2=8x_0-y_0^2=-8\sqrt{1-m^2}-4m^2$，所以 $-4t=-8\sqrt{1-m^2}-4m^2$，即 $t=2\sqrt{1-m^2}+m^2$.

因此$|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(4m)^2-4\left(-8\sqrt{1-m^2}-4m^2\right)}$

$=4\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{m^2+\sqrt{1-m^2}}$.

点P到直线AB的距离$d=\dfrac{\left|-x_0+my_0+t\right|}{\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{3\left(\sqrt{1-m^2}+m^2\right)}{\sqrt{1+m^2}}$.

所以$\triangle PAB$的面积为

$S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{m^2+\sqrt{1-m^2}}\cdot\dfrac{3\left(m^2+\sqrt{1-m^2}\right)}{\sqrt{1+m^2}}=6\sqrt{2}\left(m^2+\sqrt{1-m^2}\right)^{\frac{3}{2}}$，令

$u=\sqrt{1-m^2}$，则$m^2=1-u^2$，$u\in(0,1]$.

所以$\sqrt{1-m^2}+m^2=-u^2+u+1=-\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}\in\left[1,\dfrac{5}{4}\right]$.

故$\triangle PAB$面积的取值范图是$\left[6\sqrt{2},\dfrac{15\sqrt{10}}{4}\right]$.

【整体点评】(I）方法一：直接设点$P\left(x_0,y_0\right)$，$A\left(\dfrac{y_1^2}{4},y_1\right),B\left(\dfrac{y_2^2}{4},y_2\right)$，利用中点公式求出$PA,PB$的中点坐标，由点在抛物线上，得到同构方程，利用韦达定理证出，是该题的通性通法；

方法二：利用平面几何知识中位线定理，以及直线与抛物线的位置关系，常规设线，根据韦达定理证出；

方法三：利用抛物线的二级结论，“抛物线平行弦的轨迹为平行或重合于抛物线对称轴的射线”证出，该法适用于判断结论.

（II）方法一：用点$P\left(x_0,y_0\right)$的纵坐标y_0作参数，表示出$\triangle PAB$面积，根据函数的值域求法解出，属于通性通法；

方法二：根据椭圆的参数方程以及抛物线的弦中点性质，用三角函数表示出$\triangle PAB$面积，再由三角函数和二次函数的性质解出；

方法三：反设直线$AB:x=my+t$，通过直线与抛物线联立，用m表示出弦长$|AB|$以及$\triangle PAB$面积，根据函数形式，换元化简成二次函数解出.

22. 已知函数$f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

（1）若$f(x)$在$x=x_1,x_2\left(x_1\neq x_2\right)$处导数相等，证明：$f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)>8-8\ln 2$；

（2）若$a\leq 3-4\ln 2$，证明：对于任意$k>0$，直线$y=kx+a$与曲线$y=f(x)$有唯一公共点.

【答案】（1）证明见解析；（2）证明见解析.

【解析】

【分析】（1）方法一：先求导数，根据条件解得 x_1，x_2 关系，再化简 $f(x_1)+f(x_2)$ 为 $\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}-\ln(x_1x_2)$，利用基本不等式求得 x_1x_2 取值范围，最后根据函数单调性证明出不等式；

（2）方法一：利用零点存在定理证明函数 $t(x)=f(x)-kx-a$ 有零点，再利用导数证明函数 $h(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，即证出.

【详解】（1）[**方法一]：基本不等式＋函数思想**

函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}$，由 $f'(x_1)=f'(x_2)$，得 $\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}-\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_2}}-\dfrac{1}{x_2}$，

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $\dfrac{1}{\sqrt{x_1}}+\dfrac{1}{\sqrt{x_2}}=\dfrac{1}{2}$．由基本不等式得 $\dfrac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geq 2\sqrt[4]{x_1x_2}$．

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $x_1x_2>256$．

由题意得 $f(x_1)+f(x_2)=\sqrt{x_1}-\ln x_1+\sqrt{x_2}-\ln x_2=\dfrac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}-\ln(x_1x_2)$．

设 $g(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x}-\ln x$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{4x}(\sqrt{x}-4)$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,16)$ 上递减，在 $(16,+\infty)$ 上递增，故 $g(x_1x_2)>g(256)=8-8\ln 2$，

即 $f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$．

[**方法二]：换元＋同构＋函数思想**

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$．令 $f'(x_1)=f'(x_2)=t$，即关于 $\sqrt{x}$ 的二次方程 $2t(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}+2=0$ 的两个相异根分别为 $\sqrt{x_1},\sqrt{x_2}$，

则 $\begin{cases}\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2}=\dfrac{1}{t}\\ \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\dfrac{1}{2t}\\ \Delta=(-1)^2-4\times 2t\times 2>0\end{cases}$，解得 $0<t<\dfrac{1}{16}$.

所以 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)=\left(\sqrt{x_1}-\ln x_1\right)+\left(\sqrt{x_2}-\ln x_2\right)=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-\ln\left(x_1x_2\right)=\dfrac{1}{2t}+2\ln t$.

令 $g(t)=\dfrac{1}{2t}+2\ln t, 0<t<\dfrac{1}{16}$，则 $g'(t)=\dfrac{4t-1}{2t^2}<0$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{16}\right)$ 上恒成立.

所以 $g(t)=\dfrac{1}{2t}+2\ln t$ 在区间 $\left(0,\dfrac{1}{16}\right)$ 内单调递减，因此 $g(t)>g\left(\dfrac{1}{16}\right)=8-8\ln 2$，得证.

（2）［方法一］：**【通性通法】【最优解】零点存在性定理＋单调性**

设 $t(x)=f(x)-kx-a=\sqrt{x}-\ln x-kx-a$，

令 $m=\mathrm{e}^{-(|a|+k)}<1, n=\left(\dfrac{|a|+1}{k}\right)^2+1>1$,则

$f(m)-km-a>|a|+k-k-a\geq 0$，

$f(n)-kn-a<n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{a}{n}-k\right)\leq n\left(\dfrac{|a|+1}{\sqrt{n}}-k\right)<0$

所以,$t\left(m\right)t\left(n\right)<0$，即存在 $x_0\in(m,n)$ 使 $f\left(x_0\right)=kx_0+a$，

所以,对于任意的 $a\in\mathrm{R}$ 及 $k\in(0,+\infty)$,直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有公共点.

由 $f(x)=kx+a$ 得 $k=\dfrac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$.

设 $h(x)=\dfrac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}, h'\left(x\right)=\dfrac{\ln x-\dfrac{\sqrt{x}}{2}-1+a}{x^2}=\dfrac{-g\left(x\right)-1+a}{x^2}$，

其中 $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\ln x$.

由（1）可知 $g(x)\geq g(16)=2-4\ln 2$,又 $a\leq 3-4\ln 2$,

故 $-g(x)-1+a\leq -g(16)-1+a=-3+4\ln 2+a\leq 0$，

所以 $h'(x)\leq 0$,即函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,因此方程 $f(x)-kx-a=0$ 至多 1 个实根.

综上,当 $a\leq 3-4\ln 2$ 时,对于任意 $k>0$,直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有唯一公共点.

［方法二］：**极限思想＋零点存在性定理＋单调性**

令 $g(x)=f(x)-kx-a=\sqrt{x}-\ln x-kx-a$，因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$，又 $y=g(x)$ 的图象

在区间 $(0,+\infty)$ 上连续不断，

所以，对于任意的 $a\in\mathbf{R}$ 及 $k>0$，函数 $y=g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有零点.

以下证明，当 $a\le 3-4\ln 2$，对任意 $k>0$，函数 $y=g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上至多有一个零点.

易知 $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}-k=-\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{4}\right)^2-k+\dfrac{1}{16}$.

①当 $k\ge\dfrac{1}{16}$ 时，$g'(x)\le 0$，此时函数 $y=g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递减，所以，函数 $y=g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内至多有一个零点；

②当 $0<k<\dfrac{1}{16}$ 时，关于 x 的方程 $g'(x)=0$，即 $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}-k=0$ 有两个不同的实数根，分别记为 x_3,x_4，

不妨设 $0<x_3<x_4$，可得 $4<x_3<16$.

易知，函数 $y=g(x)$ 在区间 $\left(0,x_3\right)$ 和 $\left(x_4,+\infty\right)$ 内单调递减，在区间 $\left(x_3,x_4\right)$ 内单调递增.

所以函数 $y=g(x)$ 的极小值

$$g\left(x_3\right)=\sqrt{x_3}-\ln x_3-kx_3-a,=\sqrt{x_3}-\ln x_3-\left(\frac{1}{2\sqrt{x_3}}-\frac{1}{x_3}\right)x_3-a=\frac{\sqrt{x_3}}{2}-\ln x_3+1-a\ .$$

由（1）可知 $\dfrac{\sqrt{x_3}}{2}-\ln x_3>\dfrac{\sqrt{16}}{2}-\ln 16=2-4\ln 2$，又 $a\le 3-4\ln 2$，所以 $g\left(x_3\right)>3-4\ln 2-a\ge 0$.

所以 $y=g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内至多有一个零点，得证.

[方法三]：换元法的应用

由方法一知，交点必存在，只证唯一性.

令 $t=\sqrt{x}$，只需证：对于任意 $k>0$，方程 $k=\dfrac{t-2\ln t-a}{t^2}$ 有唯一解.

设 $g(t)=\dfrac{t-2\ln t-a}{t^2}$，则 $g'(t)=\dfrac{-t+4\ln t-2+2a}{t^3}$. 设 $h(t)=-t+4\ln t-2+2a$，则 $h'(t)=\dfrac{4-t}{t}$. 当 $0<t<4$ 时，$h'(t)>0$；当 $t>4$ 时，$h'(t)<0$. 所以 $t=4$ 是 $h(t)$ 的最大值点. 由 $a\le 3-4\ln 2$ 知 $[h(t)]_{\max}=h(4)=-6+8\ln 2+2a\le 0$，因此 $g'(t)\le 0$，$g(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内递减，解必唯一.

[方法四]：图象性质的应用

由方法一知，交点必存在，只证唯一性.

$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}>0 \Leftrightarrow x>4, f''(x)=\frac{-\sqrt{x}+4}{4x^2}>0 \Leftrightarrow 0<x<16$，得 $f(x)$ 的拐点为 $x=16$．而 $f(x)$ 的图象在拐点处的切线 l 方程为 $y-(4-4\ln 2)=\frac{1}{16}(x-16)$，即 $y=\frac{1}{16}x+3-4\ln 2$．此时切线 l 穿过 $f(x)$ 的图象，与 $f(x)$ 的图象只有一个交点，所以当 $a \le 3-4\ln 2$ 时，直线 $y=kx+a$ 与 $f(x)$ 的图象只有一个交点.

【整体点评】(1) 方法一：先通过题意得出等量关系 $\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}=\frac{1}{2}$，利用基本不等式求出 x_1x_2 取值范围，再将 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)$ 用 x_1x_2 表示出来，然后构造函数，由函数的单调性即可证出；

方法二：设 $f'\left(x_1\right)=f'\left(x_2\right)=t$，利用同构以及方程思想可得 t 的取值范围，再将 $f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)$ 用 t 表示出来，然后构造函数，由函数的单调性即可证出；

(2) 方法一：利用等价转化思想，直线与曲线有唯一交点，转化为 $t(x)=f(x)-kx-a$ 有唯一零点，找点利用零点存在性定理以及函数的单调性即可证出，是该题的通性通法；

方法二：解题思想同方法一，方法二借用极限思想快速判断函数 $g(x)=f(x)-kx-a=\sqrt{x}-\ln x-kx-a$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上有零点，再分类讨论说明函数 $y=g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上至多有一个零点，即可证出，只不过欠缺严谨性；

方法三：同方法一，知交点必存在，只是证明唯一性的方式不同，

通过换元，证明对于任意 $k>0$，方程 $k=\frac{t-2\ln t-a}{t^2}$ 有唯一解，利用导数说明函数 $g(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内递减，即证出；

方法四：同方法一，知交点必存在，只是证明唯一性的方式不同，根据函数 $f(x)$ 的图象的凸凹性，求出拐点所在处的切线方程，数形结合证出.