2022—2023 学年第一学期期中考

高二数学试卷

考试时间： 120 分钟

一、单选题

1. 过点 $P(-2,1)$ 且倾斜角为 90°的直线方程为（　　）

A. $y=1$　　B. $x=-2$　　C. $y=-2$　　D. $x=1$

【答案】B

【解析】

【分析】

根据倾斜角为90°的直线的方程形式，判断出正确选项.

【详解】由于过$P\left(-2,1\right)$的直线倾斜角为90°，即直线垂直于x轴，所以其直线方程为$x=-2$.

故选：B

【点睛】本小题主要考查倾斜角为90°的直线的方程，属于基础题.

2. 已知空间向量$\overrightarrow{AB}=\left(3,-4,5\right)$，则$\left|\overrightarrow{AB}\right|=$（　　）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. $5\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用空间向量模长公式进行求解.

【详解】$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+\left(-4\right)^2+5^2}=5\sqrt{2}$.

故选：D

3. 若椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$与椭圆$\dfrac{x^2}{25-k}+\dfrac{y^2}{9-k}=1(k<9,k\neq 0)$，则两椭圆必定（　　）.

A. 有相等的长轴长　　B. 有相等的焦距

C. 有相等的短轴长　　D. 有相等的离心率

【答案】B

【解析】

【分析】先确定两椭圆的长轴和短轴，计算其a,b,c，比较即可.

【详解】因为$k<9,k\neq 0$，所以$25-k>9-k>0$，所以椭圆$\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1(k<9,k\neq 0)$中

$a^2=25-k\neq 25$，$b^2=9-k\neq 9$，故 A,C 错误；椭圆$\frac{x^2}{25-k}+\frac{y^2}{9-k}=1(k<9,k\neq 0)$的

$c^2=a^2-b^2=25-k-(9-k)=16$，椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的$c^2=25-9=16$，故两椭圆$c$相等，所以有相等的焦距，故 B 正确；离心率$e=\frac{c}{a}$，两椭圆$a$不相等，$c$相等，显然离心率不一样，故 D 错误.

故选：B

4. 关于x，y的方程组$\begin{cases}2x-ay+1=0\\x+2y-1=0\end{cases}$，没有实数解，则实数$a$的值是（　　）

A. 4　　B. 2　　C. -4　　D. -2

【答案】C

【解析】

【分析】根据两直线平行的条件可得.

【详解】依题意，得直线$2x-ay+1=0$与直线$x+2y-1=0$平行，且$a\neq 0$.

所以$\frac{2}{a}=-\frac{1}{2}$得$a=-4$.

故选：C.

5. 若圆C与圆$(x+2)^2+(y-1)^2=1$关于直线$y=x-1$对称，则圆C的方程是（　　）

A. $(x-2)^2+(y+3)^2=1$　　B. $(x-2)^2+(y-3)^2=1$

C. $(x+2)^2+(y+3)^2=1$　　D. $(x+3)^2+(y-2)^2=1$

【答案】A

【解析】

【分析】利用两点关于直线对称可求得圆心C的坐标，进而可得出圆C的方程.

【详解】记点$A(-2,1)$，设圆心C的坐标为(a,b)，则$k_{AC}=\frac{b-1}{a+2}=-1$，可得$a+b+1=0$，

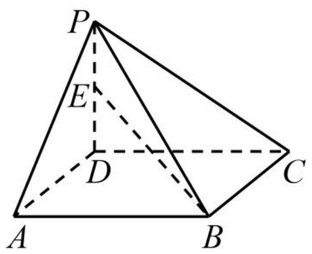
线段AC的中点$M\left(\frac{a-2}{2},\frac{b+1}{2}\right)$在直线$y=x-1$上，则$\frac{b+1}{2}=\frac{a-2}{2}-1$，即$b=a-5$，

所以，$\begin{cases}a+b+1=0\\b=a-5\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}$，即圆心$C(2,-3)$，

因此，圆 C 的方程为 $\left(x-2\right)^2+\left(y+3\right)^2=1$.

故选：A.

6. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，E 为 PD 中点，若 $\overrightarrow{PA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{PB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{PC}=\vec{c}$，则 $\overrightarrow{BE}=$（　　）



A. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　　　B. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

C. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$　　　　D. $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据向量线性运算法则计算即可.

【详解】$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BD})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB})$

$=-\frac{3}{2}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

故选：C.

7. 已知直线 $x-2\sqrt{2}y+3m=0$ 和圆 $x^2+y^2-6x+5=0$ 相交，则实数 m 的取值范围为（　　）

A. $\left(-\infty,-3\right)$　　B. $\left(-3,1\right)$　　C. $\left[-3,1\right]$　　D. $\left(1,+\infty\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】求出圆心到直线的距离与半径比较，解不等式，即可求解.

【详解】圆 $x^2+y^2-6x+5=0$ 可化为 $(x-3)^2+y^2=4$，圆心为 $(3,0)$，半径为 2

圆心到直线的距离 $d=\frac{\left|3+3m\right|}{3}=\left|1+m\right|$

由直线与圆相交可知 $\left|1+m\right|<2$，解得 $-3<m<1$

所以实数m的取值范围为$\left(-3,1\right)$

故选：B

8. 已知F是椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的右焦点，$A$是$C$的上顶点，直线$l$：$3x-4y=0$与$C$交于$M$，$N$两点．若$\left|MF\right|+\left|NF\right|=6$，$A$到$l$的距离不小于$\frac{8}{5}$，则$C$的离心率的取值范围是（　　）

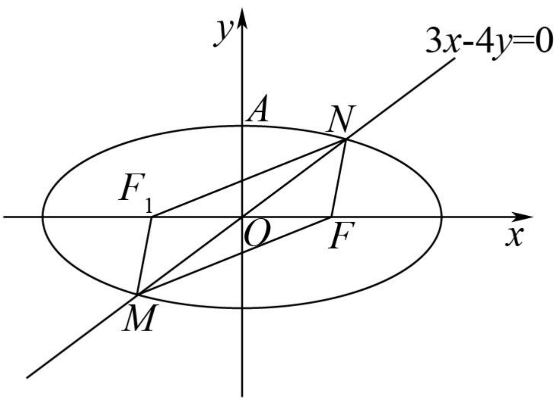
A. $\left[\frac{\sqrt{5}}{3},1\right)$　　B. $\left(0,\frac{\sqrt{5}}{3}\right]$　　C. $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$　　D. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】据$\left|MF\right|+\left|NF\right|=\left|NF_1\right|+\left|NF\right|=2a=6$，得到$a=3$，根据点$A$到直线$l$距离$d$，求出$b\geq 2$，从而求出$c$得范围，从而求出答案.

【详解】设椭圆的左焦点为F_1，A是C的上顶点，连接MF_1,NF_1，如下图所示：



由椭圆的对称性可知，M,N关于原点对称，则$OM=ON$

又$OF_1=OF$　，$\therefore$四边形$MFNF_1$为平行四边形

$\therefore MF=NF_1$　，

又$\left|MF\right|+\left|NF\right|=\left|NF_1\right|+\left|NF\right|=2a=6$，解得：$a=3$

A到l的距离为：$d=\frac{\left|-4b\right|}{5}\geq\frac{8}{5}$，

解得：$b\geq 2$，即$\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{9-c^2}\geq 2$

$\therefore 0<c\leq\sqrt{5}$　　$\therefore e=\frac{c}{a}\in\left(0,\frac{\sqrt{5}}{3}\right]$.

故选：B.

二、多选题

9. 直线l_1,l_2的斜率k_1,k_2是关于k的方程$2k^2-4k+m=0$的两个根，则下列说法正确的是（　　）

A. 若$l_1\perp l_2$，则$m=-2$

B. 若$l_1\perp l_2$，则$m=2$

C. 若$l_1//l_2$则$m=-2$

D. 若$l_1//l_2$，则$m=2$

【答案】AD

【解析】

【分析】根据韦达定理得到$k_1\cdot k_2=\frac{m}{2}$，由两直线垂直斜率之积为-1可得结果；再根据两直线平行斜率相等，结合$\Delta=0$可得结果.

【详解】直线l_1，l_2的斜率k_1，k_2是关于k的方程$2k^2-4k+m=0$的两根，$\therefore k_1\cdot k_2=\frac{m}{2}$，

若$l_1\perp l_2$，则$k_1k_2=\frac{m}{2}=-1$，得$m=-2$；

若$l_1//l_2$，则$k_1=k_2$，$\therefore \Delta=16-8m=0$，得$m=2$，

故选：AD

10. 已知圆C：$(x+1)^2+y^2=9$，则下列四个命题表述正确的是（　　）

A. 圆C上有且仅有3个点到直线1：$x-\sqrt{3}y-1=0$的距离都等于1

B. 过点$A(3,4)$作圆C的两条切线，切点分别为M，N，直线MN的方程为$4x+4y-5=0$

C. 一条直线与圆C交于不同的两点P，Q，且有$\sqrt{3}\left|\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}\right|-\left|\overrightarrow{PQ}\right|\geqslant 0$，则$\angle PCQ$的最大值为$\frac{2\pi}{3}$

D. 若圆C与E：$x^2+y^2-4x-8y+m^2=0$相外切，则$m=4$

【答案】BC

【解析】

【分析】对于A：根据题意利用点到直线距离可得$d<r-1$，故圆C上有4个点到直线l的距离为1；对于B：利用两圆公共弦的求法理解处理；对于C：根据向量和垂径定理可得$\sqrt{3}\geqslant\frac{\left|\overrightarrow{PD}\right|}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}$，理解分析；对于D：根据两圆外切得$R+r=|CE|$，运算判断.

【详解】圆C的圆心$C(-1,0)$，半径$r=3$，

圆心 C 到直线 l：$x-\sqrt{3}y-1=0$ 的距离 $d=\frac{\left|-1-\sqrt{3}\times 0-1\right|}{\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}}=1<r-1$，故圆 C 上有 4 个点到直线 l 的距离为 1，故 A 不正确；

过点 $A\left(3,4\right)$ 作圆 C 的两条切线，切点分别为 M，N，则 A、C、M、N 四点共圆，且为 AC 为直径，方程为 $x^2+y^2-2x-4y-3=0$，MN 是其圆 C 的公共弦，直线 MN 为 $4x+4y-5=0$，故 B 正确；

设 PQ 的中点为 D，则 $CD\perp PQ$．因为 $\sqrt{3}\left|\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}\right|-\left|\overrightarrow{PQ}\right|\geqslant 0$，

即 $\sqrt{3}\cdot 2\left|\overrightarrow{CD}\right|\geqslant 2\left|\overrightarrow{PD}\right|$，可得 $\sqrt{3}\geqslant\frac{\left|\overrightarrow{PD}\right|}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}$，

则 $\angle DCP\leqslant\frac{\pi}{3}$，故 $\angle PCQ$ 的最大值为 $\frac{2\pi}{3}$，故 C 正确；

圆 E：$x^2+y^2-4x-8y+m^2=0$ 的圆心 $E\left(2,4\right)$，半径 $R=\sqrt{20-m^2}$

根据题意可得 $R+r=\left|CE\right|$，即 $3+\sqrt{20-m^2}=5$ 得 $m=\pm 4$，故 D 错误．

故选：BC．

11. 已知两点 $M\left(2,-3\right)$，$N\left(-3,-2\right)$，直线 l 过点 $P\left(1,1\right)$ 且与线段 MN 相交，则直线 l 的斜率 k 的取值范围是（　　）

A. $k\le -4$　　　　B. $k\ge\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{4}\le k\le 4$　　　　D. $-4\le k\le\frac{3}{4}$

【答案】AB

【解析】

【分析】由题可得 $k\le k_{PM}$ 或 $k\ge k_{PN}$，即可求出．

【详解】解：$k_{PM}=\frac{-3-1}{2-1}=-4$，$k_{PN}=\frac{-2-1}{-3-1}=\frac{3}{4}$，

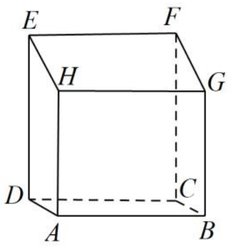
直线 l 过点 $P\left(1,1\right)$ 且与线段 MN 相交，则 $k\le k_{PM}$ 或 $k\ge k_{PN}$，

则直线 l 的斜率 k 的取值范围是：$k\le -4$ 或 $k\ge\frac{3}{4}$．

故选：AB．

12. 如图是常见的一种灭火器消防箱，抽象成数学模型为如图所示的六面体，其中四边形 $ADEH$ 和 $BCFG$ 为直角梯形，A，D，C，B 为直角顶点，其他四个面均为矩形，$AB=BG=3$，$FC=4$，BC=1，下列说

法不正确的是（　　）



A. 该几何体是四棱台

B. 该几何体是棱柱，平面 $ABCD$ 是底面

C. $EG\perp HC$

D. 平面 $EFGH$ 与平面 $ABCD$ 的夹角为 $45°$

【答案】ABC

【解析】

【分析】根据台体、柱体、空间直角坐标系、线线垂直、面面角等知识对选项进行分析，从而确定正确答案.

【详解】因为四边形 $ADEH$ 和 $BCFG$ 为直角梯形，A，D，C，B 为直角顶点，其他四个面均为矩形，

所以这个六面体是四棱柱，平面 $ADEH$ 和平面 $BCFG$ 是底面，故 A，B 错误；

由题意可知 DA，DC，DE 两两垂直，如图，以点 D 为坐标原点建立空间直角坐标系，

则 $E(0,0,4),G(1,3,3),C(0,3,0),H(1,0,3),\overrightarrow{EG}=(1,3,-1),\overrightarrow{CH}=(1,-3,3)$，

则 $\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{CH}=1-9-3=-11\neq 0$，所以 EG，HC 不垂直，故 C 错误；

根据题意可知 $DE\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\overrightarrow{DE}=(0,0,4)$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量，

$\overrightarrow{EH}=(1,0,-1),\overrightarrow{HG}=(0,3,0)$，

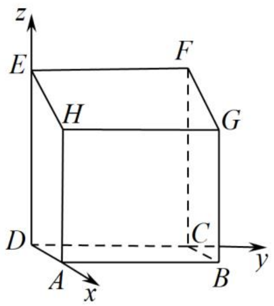
设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 $EFGH$ 的法向量，

则有 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EH}=x-z=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{HG}=3y=0,\end{cases}$ 则可取 $\vec{n}=(1,0,1)$，

则 $\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{DE}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{DE}|}=\dfrac{4}{4\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以平面 $EFGH$ 与平面 $ABCD$ 的夹角为 $45°$，故 D 正确.

故选：ABC



三、填空题

13. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(-2,-1,3),\overrightarrow{AC}=(1,2,2)$ 则 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量的模为__________.

【答案】$\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】直接利用向量的夹角运算的应用求出结果.

【详解】因为 $\overrightarrow{AB}=(-2,-1,3),\overrightarrow{AC}=(1,2,2)$，，

所以 $\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{-2-2+6}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{9}}=\frac{2}{3\sqrt{14}}$；

所以向量 $\overrightarrow{AB}$ 在向量 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影向量的模 $|\overrightarrow{AB}|\cos<\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}>=\sqrt{14}\times\frac{2}{3\sqrt{14}}=\frac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{2}{3}$.

14. 已知直线 $l:(m+2)x+(2m-1)y+m+5=0$，则直线 l 恒过定点_____.

【答案】$\left(-\frac{11}{5},\frac{3}{5}\right)$

【解析】

【分析】将直线 l 的方程变形为 $m(x+2y+1)+(2x-y+5)=0$，解方程组 $\begin{cases}x+2y+1=0\\2x-y+5=0\end{cases}$，可得出直线 l 所过定点的坐标.

【详解】直线 l 的方程可化为 $m(x+2y+1)+(2x-y+5)=0$，

由 $\begin{cases}x+2y+1=0\\2x-y+5=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=-\frac{11}{5}\\y=\frac{3}{5}\end{cases}$，

故直线 l 恒过定点 $\left(-\frac{11}{5},\frac{3}{5}\right)$.

故答案为：$\left(-\frac{11}{5},\frac{3}{5}\right)$.

15. 已知圆 $x^2+y^2=1$ 与圆 $(x-2)^2+y^2=a^2(a>0)$ 相切，则 a=______.

【答案】1 或 3##3 或 1

【解析】

【分析】由已知可得两个圆的圆心和半径，求出圆心距，分两圆内切和外切两种情况讨论，求出 a 的值即可.

【详解】圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心为 $(0,0)$，半径 $r_1=1$，

圆 $(x-2)^2+y^2=a^2(a>0)$ 的圆心为 $(2,0)$，半径 $r_2=a$，

其圆心距 d=2 .

若两圆内切，则有 $d=|r_1-r_2|=|a-1|$，即 $|a-1|=2$，可得 a=3 或 $a=-1$（舍）;

若两圆外切，则有 $d=a+1$，即 $a+1=2$，解可得 a=1 .

故答案为：1 或 3.

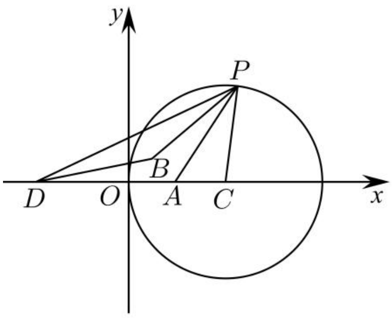
16. 已知圆 C 是以点 $M\left(2,2\sqrt{3}\right)$ 和点 $N\left(6,-2\sqrt{3}\right)$ 为直径的圆，点 P 为圆 C 上的动点，若点 $A(2,0)$，点 $B(1,1)$，则 $2|PA|-|PB|$ 的最大值为__________

【答案】$\sqrt{26}$

【解析】

【分析】求出圆 C 的方程，构造 $\triangle APC\sim\triangle PCD$，得到 $\frac{PA}{PD}=\frac{1}{2}$，$2|PA|-|PB|=|PD|-|PB|$，然后根据几何知识求最值即可.

【详解】



根据题意得 $C(4,0)$，$|MN|=\sqrt{(6-2)^2+\left(-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\right)^2}=8$，所以圆 C 的半径为 4，圆 C 的方程为 $(x-4)^2+y^2=16$，如图，$D(-4,0)$，则 $OD=2AC=CP=OC=4$，

所以 $\frac{AC}{CP}=\frac{PC}{DC}=\frac{1}{2}$，即 $\triangle APC\sim\triangle PCD$，故 $\frac{PA}{PD}=\frac{1}{2}$，

所以$2|PA|-|PB|=|PD|-|PB|$，在$\triangle PBD$中，$|PD|-|PB|<|BD|$，当P、B、D共线时$|PD|-|PB|$最大，最大为$|BD|=\sqrt{(1+4)^2+1}=\sqrt{26}$.

故答案为：$\sqrt{26}$.

三、解答题

17. 已知向量$\vec{a}=(x,4,1)$，$\vec{b}=(-2,y,-1)$，$\vec{c}=(3,-2,z)$，$\vec{a}\parallel\vec{b}$，$\vec{b}\perp\vec{c}$.

（1）求$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$；

（2）求$\vec{a}+\vec{c}$与$\vec{b}+\vec{c}$所成角的余弦值.

【答案】（1）$\vec{a}=(2,4,1)$，$\vec{b}=(-2,-4,-1)$，$\vec{c}=(3,-2,2)$

（2）$-\frac{2}{19}$

【解析】

【分析】（1）根据向量平行得到$\vec{a}=\lambda\vec{b}$，根据向量垂直得到$\vec{b}\cdot\vec{c}=0$，计算得到答案.

（2）计算$\vec{a}+\vec{c}=(5,2,3)$，$\vec{b}+\vec{c}=(1,-6,1)$，再根据向量的夹角公式计算得到答案.

【小问1详解】

$\vec{a}\parallel\vec{b}$，故$\vec{a}=\lambda\vec{b}$，即$(x,4,1)=(-2\lambda,y\lambda,-\lambda)$，

故$\lambda=-1$，$x=2$，$y=-4$，即$\vec{a}=(2,4,1)$，$\vec{b}=(-2,-4,-1)$，

$\vec{b}\perp\vec{c}$，故$\vec{b}\cdot\vec{c}=(-2,-4,-1)\cdot(3,-2,z)=-6+8-z=0$，$z=2$，故$\vec{c}=(3,-2,2)$

【小问2详解】

$\vec{a}+\vec{c}=(5,2,3)$，$\vec{b}+\vec{c}=(1,-6,1)$，$\vec{a}+\vec{c}$与$\vec{b}+\vec{c}$所成角的余弦值为：

$$\cos\theta=\frac{(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|\vec{a}+\vec{c}|\cdot|\vec{b}+\vec{c}|}=\frac{5-12+3}{\sqrt{5^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{1^2+6^2+1^2}}=-\frac{2}{19}$$

18. 已知直线$l_1:3x-2y+4=0$与直线$l_2:x-ay+a-2=0$相交于点P，且点P在直线$2x-y+3=0$上.

（1）求点P的坐标和实数a的值；

（2）求与直线l_2平行且与点P的距离为$\sqrt{5}$的直线方程.

【答案】（1）$P(-2，-1)$；$a=2$

（2）$x-2y+5=0$或$x-2y-5=0$

【解析】

【分析】（1）由题意，联立直线方程，求交点，再将点代入含参直线方程，求得答案；

（2）由（1）明确直线方程，根据平行，设出所求直线方程，利用点到直线距离公式，可得答案.

【小问1详解】

所以联立$\begin{cases}3x-2y+4=0\\2x-y+3=0\end{cases}$，解得：$P(-2，-1)$.

将P的坐标$(-2，-1)$代入直线$l_2: x-ay+a-2=0$中，解得$a=2$.

【小问2详解】

由（1）知直线$l_2: x-2y=0$，设所求直线为$l: x-2y+c=0$.

因此点P到直线l的距离$d=\frac{|c|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，解方程可得$c=5$或$-5$，

所以直线的方程为$x-2y+5=0$或$x-2y-5=0$.

19. 已知圆C过点$A(-2,-2)$，$B(6,2)$，$D(4,6)$.

（1）求圆C的标准方程；

（2）过点$P(4,-4)$的直线l被圆C截得的弦长为8，求直线l的一般式方程.

【答案】（1）$(x-1)^2+(y-2)^2=25$；

（2）$x=4$或$3x+4y+4=0$.

【解析】

【分析】（1）设圆的一般方程，应用待定系数法，根据点在圆上列方程组求参数，即可得方程；

（2）由（1）所得圆的方程及弦长易知圆心到所求直线的距离为3，讨论直线的斜率的存在性，再结合点线距离公式求直线方程.

【小问1详解】

设圆C的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

由题意知$\begin{cases}8-2D-2E+F=0\\40+6D+2E+F=0\\52+4D+6E+F=0\end{cases}$，解方程组得$\begin{cases}D=-2\\E=-4\\F=-20\end{cases}$，

故所求圆的方程为$x^2+y^2-2x-4y-20=0$，即$(x-1)^2+(y-2)^2=25$；

【小问2详解】

因为过点$P(4,-4)$的直线l被圆C截得的弦长为8，故圆心$C\left(1,2\right)$到直线的距离为3，则

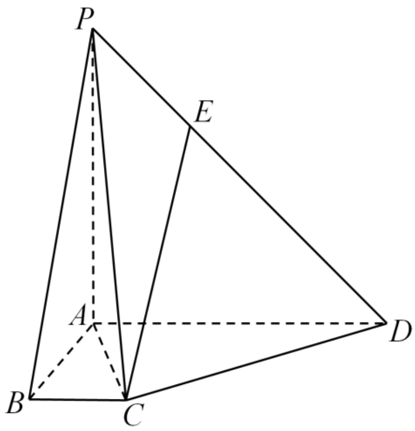
（i）当直线l的斜率不存在时，直线l的方程为x=4，满足题意；

（ii）当直线l的斜率存在时，可设直线方程为$y+4=k(x-4)$，即$kx-y-4k-4=0$，

则圆心$C\left(1,2\right)$到直线的距离$d=\dfrac{\left|-3k-6\right|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，解得$k=-\dfrac{3}{4}$，此时直线方程为$3x+4y+4=0$.

综上，所求直线方程为x=4或$3x+4y+4=0$

20. 如图所示，在四棱锥$P-ABCD$中，已知$PA\perp$底面$ABCD$，且底面$ABCD$为梯形，$BC//AD$，$AB\perp AD$，$PA=AD=3BC=3, AB=\sqrt{2}$，点E在线段PD上，$PD=3PE$.



（1）求证：CE // 平面PAB；

（2）求点B到平面PCD的距离.

【答案】（1）见解析　　（2）$\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】（1）作EF // AD交PA于点F，证明四边形$BCEF$为平行四边形，可得$CE//BF$，再根据线面平行的判定定理即可得证；

（2）以点A为原点建立空间直角坐标系，利用向量法求解即可.

【小问1详解】

证明：作EF // AD交PA于点F，

因为$PD=3PE$，所以$EF=3AD$，

又$BC=3AD$且$BC//AD$，

所以EF // BC且$EF=BC$，

所以四边形$BCEF$为平行四边形，

所以 $CE /\!/ BF$，

又 $CE \not\subset$ 平面 PAB， $BF \subset$ 平面 PAB，

所以 $CE /\!/$ 平面 PAB；

【小问 2 详解】

解：如图，以点 A 为原点建立空间直角坐标系，

则 $B\left(\sqrt{2},0,0\right),C\left(\sqrt{2},1,0\right),D\left(0,3,0\right),P\left(0,0,3\right)$，

则 $\overrightarrow{PD}=\left(0,3,-3\right),\overrightarrow{CD}=\left(-\sqrt{2},2,0\right),\overrightarrow{PB}=\left(\sqrt{2},0,-3\right)$，

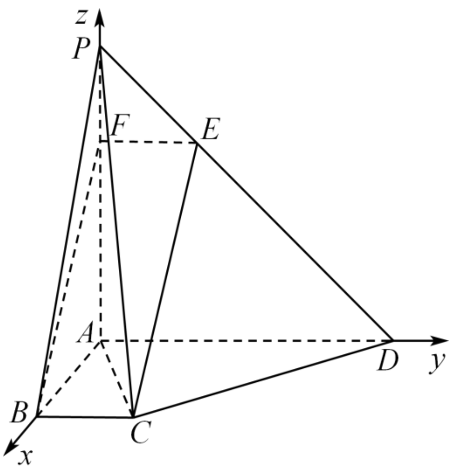
设平面 PCD 的法向量 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，

则有 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=3y-3z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=-\sqrt{2}x+2y=0\end{cases}$，可取 $\vec{n}=\left(\sqrt{2},1,1\right)$，

设直线 PB 与平面 PCD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{PB}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\overrightarrow{PB}\right|}=\dfrac{\left|2-3\right|}{\sqrt{11}\times 2}=\dfrac{\sqrt{11}}{22}$，

所以点 B 到平面 PCD 的距离为 $\left|\overrightarrow{PB}\right|\sin\theta=\dfrac{1}{2}$.



21. 在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点到右焦点的距离是 3，离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）斜率为 $\sqrt{2}$ 的直线 l 经过椭圆 E 的右焦点，且与椭圆 E 相交于 A，B 两点，求弦 AB 的长.

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

（2）$\frac{36}{11}$

【解析】

【分析】（1）根据题设条件可得关于基本量的方程组，求解后可求椭圆的方程.

（2）联立直线方程和椭圆方程，利用公式可求弦长.

【小问 1 详解】

设椭圆的半焦距为c，则$a+c=3$，而$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，则$a=2c$，

故$a=2,c=1$，故$b^2=4-1=3$，故椭圆方程为：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

椭圆的右焦点坐标为$\left(1,0\right)$，则直线$l:y=\sqrt{2}\left(x-1\right)$，

由$\begin{cases} y=\sqrt{2}\left(x-1\right) \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$，故$11x^2-16x-4=0$，

设$A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，故$\left|AB\right|=\sqrt{1+2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+2}\times\frac{\sqrt{16^2+16\times11}}{11}=\frac{36}{11}$.

22. 已知圆$M:(x+1)^2+y^2=36$，点$A\left(1,0\right)$，P为M上一动点，Q始终为PA的中点.

（1）求动点Q的轨迹方程；

（2）若存在定点$B(b,0)$和常数$k(k\neq1)$，对Q轨迹上的任意一点S，恒有$\frac{|SA|}{|SB|}=k$，求b与k的值.

【答案】（1）$x^2+y^2=9$

（2）$b=1$，$k=\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】（1）设$P\left(x_0,y_0\right),Q(x,y)$，由中点公式可得$\begin{cases} x_0=2x-1 \\ y_0=2y \end{cases}$，代入到圆的方程中，整理即可求解；

（2）设$S\left(x',y'\right)$，由两点间距离公式可得$\frac{|SA|}{|SB|}=\frac{\sqrt{\left(x'-1\right)^2+y'^2}}{\sqrt{\left(x'-b\right)^2+y'^2}}=k$，结合$x'^2+y'^2=9$，可得

$10-9k^2-b^2k^2+2\left(k^2b-1\right)x'=0$，由式子恒成立，可知$\begin{cases} 10-9k^2-b^2k^2=0 \\ k^2b-1=0 \end{cases}$，即可求解.

【小问 1 详解】

设 $P\left(x_0, y_0\right), Q(x, y)$，

因为 Q 为 PA 的中点，$A(1,0)$，所以 $\begin{cases} x_0+1=2x \\ y_0=2y \end{cases}$，即 $\begin{cases} x_0=2x-1 \\ y_0=2y \end{cases}$，

因为圆的方程为 $M:(x+1)^2+y^2=36$，则 $\left(x_0+1\right)^2+y_0^2=36$，整理得，$x^2+y^2=9$，

故动点 Q 的轨迹方程为 $x^2+y^2=9$.

【小问 2 详解】

设 $S\left(x', y'\right)$，则 $\dfrac{|SA|}{|SB|}=\dfrac{\sqrt{\left(x'-1\right)^2+y'^2}}{\sqrt{\left(x'-b\right)^2+y'^2}}=k(k>0 \text{ 且 } k \neq 1)$，

整理得 $\left(1-k^2\right)\left(x'^2+y'^2\right)+2\left(k^2 b-1\right)x'+1-b^2 k^2=0$，

因为S在 Q 的轨迹上，所以 $x'^2+y'^2=9$，

故 $10-9k^2-b^2k^2+2\left(k^2 b-1\right)x'=0$，

当且仅当 $\begin{cases} 10-9k^2-b^2k^2=0 \\ k^2 b-1=0 \end{cases}$ 时上式恒成立，此时，$k^2=\dfrac{1}{b}$，则 $10-\dfrac{9}{b}-b=0$，

解得 $b=1$ 或 9，

当 $b=1$ 时，$k=1$，不合题意，舍去；

当 $b=1$ 时，$k=\dfrac{1}{3}$，符合题意，

故 $b=1$，$k=\dfrac{1}{3}$.