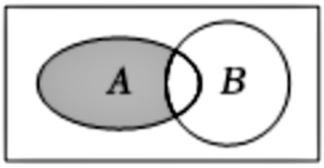
2023年福建省龙岩市高考数学质检试卷（3月份）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.（5分）若复数z满足$(1-2i)z=(2+i)^2$，则$|z|=$( )

A．5　　B．$\sqrt{5}$　　C．3　　D．$\sqrt{3}$

2.（5分）若全集$U\in R$，集合$A=\{x|y=\sqrt{5-x}$，$x\in N\}$，$B=\{y|y=-x^2+3\}$，则图中阴影部分表示的集合为( )

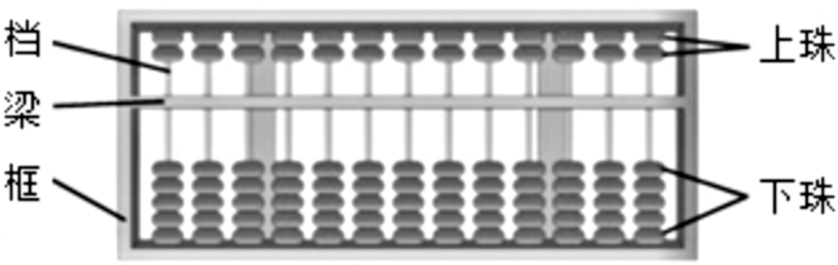


A．$\varnothing$　　B．$\{0，1，2\}$　　C．$\{3，4，5\}$　　D．$\{4，5\}$

3.（5分）已知向量$\overrightarrow{a}=(-3，0)$，$\overrightarrow{b}=(2，1)$，$\overrightarrow{c}=(\lambda，-1)$，$\lambda\in R$，若$(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{c}$，则$\overrightarrow{b}$在$\overrightarrow{c}$上的投影向量为( )

A．$(\frac{2}{5}，-\frac{1}{5})$　　B．$(\frac{2\sqrt{5}}{5}，-\frac{\sqrt{5}}{5})$　　C．$(\frac{6}{5}，-\frac{3}{5})$　　D．$(\frac{6\sqrt{5}}{5}，-\frac{3\sqrt{5}}{5})$

4.（5分）算盘是我国一类重要的计算工具．如图是一把算盘的初始状态，自右向左前四位分别表示个位、十位、百位、千位，上面一粒珠子(简称上珠)代表5，下面一粒珠子(简称下珠)代表1，即五粒下珠的代表数值等于同组一粒上珠的代表数值，例如，个位拨动一粒上珠至梁上，十位未拨动，百位拨动一粒下珠至梁上，表示数字105，现将算盘的千位拨动一粒珠子至梁上，个位、十位、百位至多拨动一粒珠子至梁上，其它位置珠子不拨动．设事件A="表示的四位数为偶数"，事件B="表示的四位数大于5050"，则$P(B|A)=$( )



A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{5}{12}$　　C．$\frac{2}{3}$　　D．$\frac{5}{6}$

5.（5分）已知两数$f(x)=2|sinx|+cosx$，则$f(x)$的最小值为( )

A．$-\sqrt{5}$　　B．-2　　C．-1　　D．0

6.（5分）已知函数$f(x)=sinx-xcosx$，若$a=f(log_2e)$，$b=f(ln3)$，$c=f(sine)$．则a，b，c的大小关系为( )

A．$b>a>c$　　B．$a>b>c$　　C．$c>a>b$　　D．$c>b>a$

7.（5分）已知M是圆C：$x^2+y^2=2$上一个动点，且直线l_1：$m(x-3)-n(y-2)=0$与直线L_2：$n(x-2)+m(y-3)=0(m，n\in R$，

$m^2+n^2\neq0$)相交于点P，则$|PM|$的最小值是( )

A. $4\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$

8. (5分) 正方体$ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，若点M在线段BC_1上运动，当$\triangle AMC$的周长最小时，三棱锥$M\text{-}CB_1D_1$的外接球表面积为( )

A. 4π　　B. 8π　　C. 16π　　D. 32π

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分，在每小圆给曲的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

1. (5分) 下列说法正确的是( )

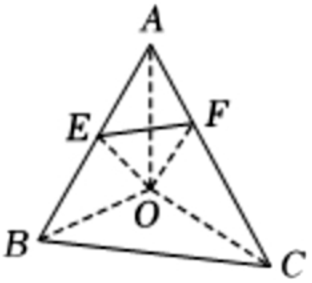
A. 一组数1，5，6，7，10，13，15，16，18，20的第75百分位数为16

B. 在经验回归方程y=-0.6x+2中，当解释变量x每增加1个单位时，相应变量$\hat{y}$增加0.6个单位

C. 数据a_1，a_2，a_3，…，a_n，的方差为M，则数据$3a_1+1$，$3a_2+1$，$3a_3+1$，…，$3a_n+1$的方差为$9M$

D. 一个梯木的方差$S^2=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}(x-2)^2$，则这组样本数据的总和等于100

2. (5分) 如图，已知$AO\perp$平面OBC，$\angle BOC=\frac{2\pi}{3}$，$OA=OB=OC=1$，$E$为$AB$的中点，$\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AF}$，则( )



A. $EF\parallel OB$　　B. $OF=\frac{\sqrt{5}}{3}$　　C. $OE\perp$平面ABC　　D. 直线OE与OF所成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{10}}{20}$

3. (5分) 已知双曲线C：$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的左，右焦点分别为F_1，F_2，左、右顶点分别为M，N，O为坐标原点．直线l交双曲线C的右支于P，Q两点(不同于右顶点)，且与双曲线C的两条渐近线分别交于A，B两点，则( )

A. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$为定值　　B. $|PA|=|BQ|$　　C. 点P到两条渐近线的距离之和的最小值为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$

D. 存在直线l使$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$

4. (5分) 已知函数$f_n(x)=x-n\ln x(n\in N)$有两个零点，分别记为x_n，$y_n(x_2<y_n)$；对于$0<\alpha<\beta$，存在θ使$f_n(\beta)-f_n(\alpha)=f_n(\theta)(\beta-\alpha)$，则( )

A. $f_n(x)$在$(1，+\infty)$上单调递增　　B. $n>e$(其中e=2.71828…是自然对数的底数)　　C. $x_{n+1}-x_n<y_{n+1}-y_n$

D. $2\theta<\alpha+\beta$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

1.（5分）已知$(a+x)(1+x)^6$的展开式中x^2的系数为21，则$a=$ ______ .

2.（5分）写出一个同时满足下列三个性质的函数$f(x)=$ ____________ .

①$f(x)$的定义域为R；

②$f(x)$是奇函数；

③$f(x+1)$是偶函数．

3.（5分）欧拉是十八世纪数学界最杰出的人物之一，他不但在数学上作出做大的贡献，而且把数学用到了几乎整个物理领域．函数$\varphi(n)$以其首名研究者欧拉命名，称为欧拉函数．在数论中，对于正整数n，$\varphi(n)$是不大于n的正整数中与n互质的数的个数，例如：$\varphi(9)=6$，则$log_3\varphi(3^{2023})=$ ______ .

4.（5分）已知抛物线C：$y^2=4x$，直线l过点$G(0，\frac{4}{3})$且与C相交于A，B两点，若$\angle AOB$的平分线过点$E(1，1)$，则直线l的斜率为 ______ .

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或算步骤.

1.（10分）已知等差数列$\{a_n\}$的首项为1．公差$d\neq0$，前n项和为S_n，且$\frac{S_n}{S_{2n}}$为常数．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)令$b_n=\frac{n}{a_na_{n+1}}-\frac{n+1}{a_{n+1}a_{n+2}}$，证明：$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n<\frac{1}{3}$．

已知等差数列$\{a_n\}$的首项为1．公差$d\neq0$，前n项和为S_n，且$\frac{S_n}{S_{2n}}$为常数．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

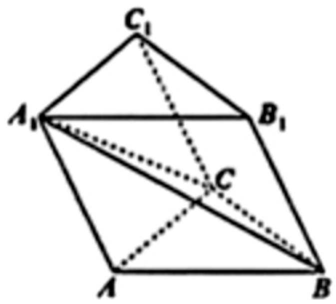
(2)令$b_n=\frac{n}{a_na_{n+1}}-\frac{n+1}{a_{n+1}a_{n+2}}$，证明：$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n<\frac{1}{3}$．

2. (12分) 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，$btanA+btanB=\frac{c}{\sqrt{3}cosA}$．

(1)求角B；

(2)若D是AC边上的点，且$AD=3DC=3$，$\angle A=\angle ABD=\theta$，求$sin\theta$的值．

3. (12分) 三棱柱ABC-$A_1B_1C_1$中，$AB\perp AC$，$AB=AC=2$，侧面A_1ACC_1，为矩形，$\angle A_1AB=\frac{2\pi}{3}$，三棱锥$C_1$-$ABC$的体积为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$．



(1)求侧棱AA_1的长；

(2)侧棱CC_1上是否存在点E，使得直线AE与平面A_1BC所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$？若存在，求出线段C_1E的长；若不存在，请说明理由．

4. (12分) 为了丰富孩子们的校园生活，某校团委牵头，发起体育运动和文化项目比赛，经过角逐．甲、乙两人进入最后的决赛．决赛先进行两天，每天实行三局两胜制，即先赢两局的人获得该天胜利，此时该天比赛结束．若甲、乙两人中的一方能连续两天胜利，则其为最终冠军；若前两天甲、乙两人各赢一天，则第三天只进行一局附加赛，该附加赛的取胜方为最终冠军．设每局此赛甲获胜的概率为$\frac{1}{3}$，每局比赛的结果没有平局且结果互相独立．

(1)记第一天需要进行的比赛局数为X，求X的分布列及$E(X)$；

(2)记一共进行的比赛局数为Y，求$P(Y\leq 5)$．

5. (12分) 已知椭圆K：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1(-2，0)$，$F_2(2，0)$，过右焦点$F_2$的直线$l$交椭圆$K$于$M$，$N$两点，以线段$|MF_2|$为直径的圆$C$与圆$C_1$：$x^2+y^2=8$内切．

(1)求椭圆K的方程；

(2)过点M作$ME\perp x$轴于点E，过点N作$NQ\perp x$轴于点Q，OM与NE交于点P，是否存在直线l截得$\triangle PMN$的面积等于$\frac{\sqrt{6}}{2}$？若存在，求出直线l的方程；若不存在，请说明理由．

6. (12分) 已知函数$f(x)=lnx$，$g(x)=x-\frac{2}{x}$．

(1)若x_0满足$f(x)=\frac{x_0+1}{x_0-1}$，证明：曲线$y=f(x)$在点$A(x_0，lnx_0)$处的切线也是曲线$y=e^x$的切线；

(2)若$F(x)=f(x)-g(x)$，且$F'(x_1)=F'(x_2)(x_1\neq x_2)$，证明：$F(x_1)+F(x_2)<4ln2-7$．

2023年福建省龙岩市高考数学质检试卷（3月份）（答案）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 解：$(1-2i)z=(2+i)^2=3+4i$，

则$z=\frac{3+4i}{1-2i}=\frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=-1+2i$，

故$|z|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$．

故选：B．

2. 解：由韦恩图可知，阴影部分表示的集合为$A\cap(\complement_U B)$，

$A=\{x|y=\sqrt{5-x}$，$x\in N\}=\{x|5-x\geq 0$，$x\in N\}=\{x|x\leq 5$，$x\in N\}=\{0$，1，2，3，4，$5\}$，

$\because B=\{y|y=-x^2+3\}=\{x|x\leq 3\}$，$\therefore \complement_U B=\{x|x>3\}$，

$\therefore A\cap(\complement_U B)=\{4$，$5\}$，

故选：D．

3. 解：$\because$向量$\overrightarrow{a}=(-3$，$0)$，$\overrightarrow{b}=(2$，$1)$，$\overrightarrow{c}=(\lambda$，$-1)$，$\lambda\in R$，$(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{c}$，而$\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}=(1$，$2)$，

$\therefore(\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\bullet\overrightarrow{c}=1\times\lambda+(-1)\times 2=0$，$\therefore\lambda=2$，$\therefore\overrightarrow{c}=(2$，$-1)$．

$\therefore\overrightarrow{b}\bullet\overrightarrow{c}=4-1=3$，则$\overrightarrow{b}$在$\overrightarrow{c}$上的投影向量为$\frac{\overrightarrow{b}\bullet\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{c}|}\bullet\frac{\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{c}|}=\frac{3}{\sqrt{5}}\bullet(\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\frac{-1}{\sqrt{5}})=(\frac{6}{5}$，$-\frac{3}{5})$，

故选：C．

4. 解：算盘的千位拨动一粒珠子至梁上，个位、十位、百位至多拨动一粒珠子至梁上，其它位置珠子不拨动．

基本事件为：1000，1001，1005，1010，1050，1100，1500，5000，5001，5005，5010，5050，5100，5500共14种，

事件A="表示的四位数为偶数"，则$P(A)=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$，

事件B="表示的四位数大于5050"，则$P(AB)=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$，

所以$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{5}$．

故选：A．

5. 解：$\because f(-x)=2|sin(-x)|+cos(-x)=2|sinx|+cosx=f(x)$，

$\therefore f(x)=2|sinx|+cosx$为偶函数，

又$f(x+2\pi)=2|sin(x+2\pi)|+cos(x+2\pi)=2|sinx|+cosx=f(x)$，

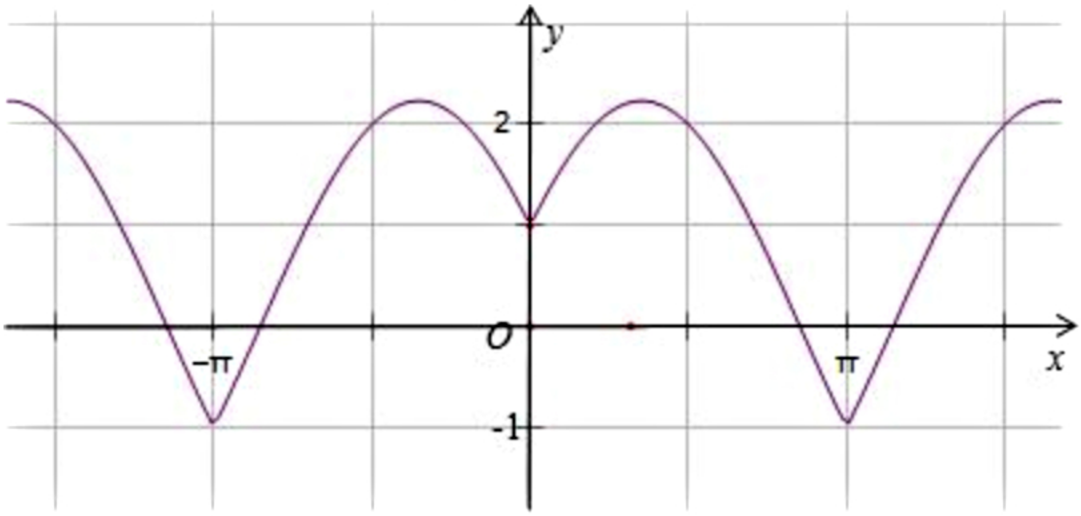
$\therefore f(x)$的周期为2π，

当$x\in[0，\pi]$时，$f(x)=2sinx+cosx$，$f'(x)=2cosx-sinx$，

令$f'(x)=0$，得$tanx=2$，$x=arctan2$，

当$x\in[0，arctan2]$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，当$x\in[arctan2，\pi]$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，

又$f(0)=1$，$f(\pi)=-1$，作出$f(x)=2|sinx|+cosx$的图象，如图：



由图可知，函数的最小值为-1，故C正确；

故选：C．

6. 解：因为$f(x)=sinx-xcosx$，

所以$f'(x)=cosx-cosx+xsinx=xsinx$，

所以当$x\in(0，\pi)$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(0，\pi)$上单调递增，

因为$ln2ln3<(\frac{ln2+ln3}{2})^2=(\frac{ln6}{lne^2})^2<1$，

所以$1<ln3<\frac{1}{ln2}=\frac{1}{\frac{log_2 2}{log_2 e}}=log_2 e$，

因为$e\in(\frac{5\pi}{6}，\pi)$，

所以$sine\in(0，\frac{1}{2})$，

所以$sine<ln3<log_2 e$，

又$f(x)$在$(0，\pi)$上单调递增，

所以$f(sine)<f(ln3)<f(log_2 e)$，

故选：B．

7. 解：直线l_1：$m(x-3)-n(y-2)=0$，令$x-3=0$，则$y-2=0$，解得$x=3$，$y=2$，∴直线l_1经过定点$A(3，2)$；

同理直线l_2：$n(x-2)+m(y-3)=0$经过点$B(2，3)$，

由$mn-mn=0$，可得直线$l_1\perp$直线l_2，

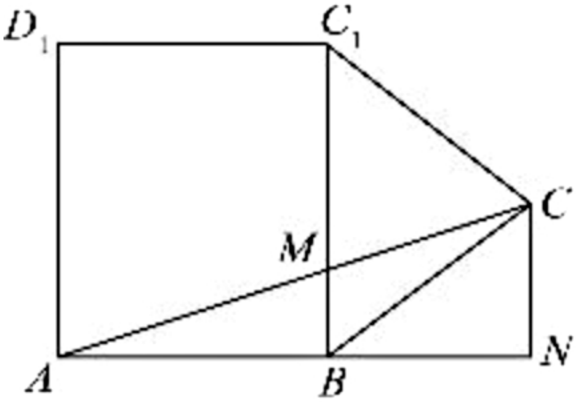
∴点P在以$D(\frac{5}{2}，\frac{5}{2})$为圆心，以$\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{(3-2)^2+(2-3)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$为半径的圆上，其方程为$(x-\frac{5}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{1}{2}$，$|OD|=\frac{5}{2}\sqrt{2}$，

∴$|PM|\in[\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}，\frac{5}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}+\sqrt{2}]$，即$|PM|\in[\sqrt{2}，4\sqrt{2}]$．

故选：D．

8. 解：$\triangle AC$的周长为$AM+MC+AC$，AC为定值，即$AM+MC$最小时，$\triangle AMC$的周长最小，

如图，将平面BCC_1展成与平面ABC_1D_1同一平面，当点A，M，C共线时，此时$AM+MC$最小，



作$CN\perp AB$，垂足为N，$\frac{BM}{CN}=\frac{AB}{AN}\Rightarrow\frac{BM}{\sqrt{2}}=\frac{2}{2+\sqrt{2}}$，解得：$BM=\sqrt{2}-2$，

如图，以点D为原点，建立空间直角坐标系，

$C(0，2，0)$，$M(\sqrt{2}，2，-\sqrt{2})$，

连结AC_1，$AC_1\perp$平面CB_1D_1，且经过$\triangle CB_1D_1$的中心，

所以三棱锥$M-CB_1D_1$外接球的球心在AC_1上，

设球心$O(a，2-a，2-a)$，则$OC=OM$，

即$a^2+(2-a-2)^2+(2-a)^2=(a-\sqrt{2})^2+(2-a-2)^2+(2-a-2+\sqrt{2})^2$，解得：$a=0$，

$R^2=OC^2=4$，所以外接球的表面积$S=4\pi R^2=16\pi$，

故选：C．

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分，在每小圆给曲的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

1. 解：∵$10\times75\%=7.5$，

∴一组数1，5，6，7，10，13，15，16，18，20的第75百分位数为第八个数，等于16，故A正确；

在经验回归方程$y=-0.6x+2$中，当解释变量x每增加1个单位时，相应变量$\hat{y}$减少0.6个单位，故B错误；

数据a_1，a_2，a_3，…，a_n，的方差为M，则数据$3a_1+1$，$3a_2+1$，$3a_3+1$，…，$3a_n+1$的方差为$9M$，故C正确；

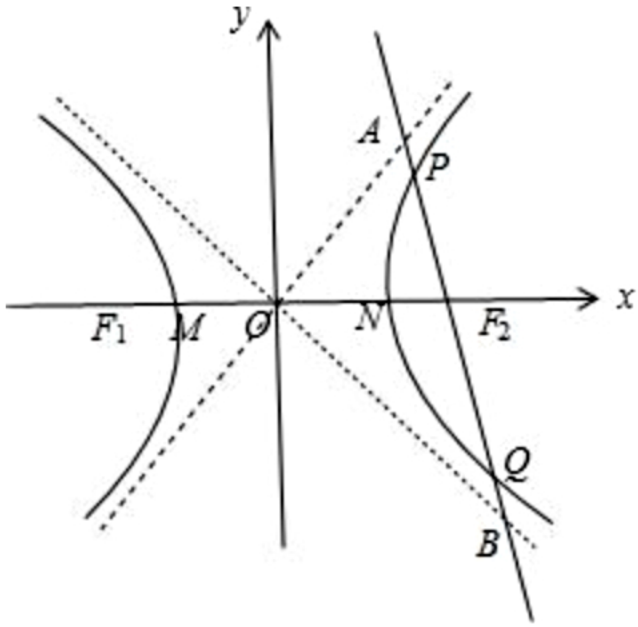
一个梯木的方差$S^2=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}(x-2)^2$，这组样本数据的平均数是2，数据总和为$2\times50=100$，故$D$正确．

故选：ACD．

2. 解：对于A，因为EF与平面AOB相交，所以EF不可能与OB平行，故A错误；
对于B，$\because AO\perp$平面OBC，$OC\subset$平面OBC，
$\therefore AO\perp OC$，
又$\because OA=OC=1$，$\therefore\angle ACO=45°$，$\therefore AC=\sqrt{2}$，
$\because \overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AF}$，$\therefore CF=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，
在$\triangle OCF$中，由余弦定理可得，$OF^2=OC^2+CF^2-2OC\times CF\times cos45°=1+\frac{8}{9}-2\times2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{5}{9}$，
$\therefore OF=\frac{\sqrt{5}}{3}$，故$B$正确；
对于C，假设$OE\perp$平面ABC，则$OE\perp BC$，
又$\because BC\perp OA$，$OE\cap OA=O$，
$\therefore BC\perp$平面AOB，又$OB\subset$平面AOB，
$\therefore BC\perp OB$，与$\angle BOC=\frac{2\pi}{3}$矛盾，
故$OE\perp$平面ABC不成立，故C错误；
对于D，$\because\angle BOC=\frac{2\pi}{3}$，$OB=OC=1$，$\therefore BC=\sqrt{3}$，
在$\triangle ABC$中，$AB=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{3}$，
$\therefore cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\bullet AC}=\frac{1}{4}$，
在$\triangle AEF$中，$AE=\frac{1}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$AF=\frac{1}{3}AC=\frac{\sqrt{2}}{3}$，$cos\angle BAC=\frac{1}{4}$，
$\therefore EF^2=AE^2+AF^2-2AE\times AF\times cos\angle BAC=\frac{1}{2}+\frac{2}{9}-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{9}$，
$\therefore EF=\frac{\sqrt{5}}{3}$，
在$\triangle OEF$中，$OE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$OF=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$EF=\frac{\sqrt{5}}{3}$，
$\therefore cos\angle EOF=\frac{OE^2+OF^2-EF^2}{2OE\times OF}=\frac{3\sqrt{10}}{20}$，
即直线OE与OF所成角的余弦值为$\frac{3\sqrt{10}}{20}$，故D正确．
故选：BD．

3. 解：双曲线C：$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的渐近线为$y=\pm\frac{1}{2}x$，
对于A：$\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|cos\angle AOB$，其中$\angle AOB$为定值，$|\overrightarrow{OA}|$，$|\overrightarrow{OB}|$随着$l$的变化而变化，

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$不是定值，故$A$错误；



对于B：设直线l的方程为$x=ky+m$，

联立$\begin{cases}x=ky+m\\ \frac{x^2}{4}-y^2=1\end{cases}$，得$(k^2-4)y^2+2kmy+m^2-1=0$，

所以$y_Q+y_P=-\frac{2km}{k^2-4}$，

联立$\begin{cases}y=kx+m\\ y=\frac{1}{2}x\end{cases}$，得$y_A=\frac{m}{2-k}$，

联立$\begin{cases}y=kx+m\\ y=-\frac{1}{2}x\end{cases}$，得$y_B=-\frac{m}{2+k}$，

所以$y_A+y_B=\frac{m}{2-k}-\frac{m}{2+k}=\frac{-2km}{4-k^2}=y_Q+y_P$，

所以PQ与AB中点相同，

所以$|PA|=|BQ|$，故B正确；

对于C：设$P(x_0,y_0)$，则$\frac{{x_0}^2}{4}-y_0^2=1$，

又双曲线的渐近线方程为$y=\pm\frac{1}{2}x$，

所以P到两渐近线距离$d_1+d_2=\frac{|x_0+2y_0|}{\sqrt{5}}+\frac{|x_0-2y_0|}{\sqrt{5}}\geq 2\sqrt{\frac{1}{5}|{x_0}^2-4{y_0}^2|}=2\times\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，

所以点P到两条渐近线的距离之和的最小值为$\frac{4\sqrt{5}}{5}$，故C正确；

对于D：由图知$\angle PMQ<\angle POQ=2arctan\frac{1}{2}<arctan1=2\times45°=90°$，

所以$\angle PMQ<90°$恒成立，

所以不存在l使得$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$，故$D$错误，

故选：BC．

4. 解：对于A：因为$f'_n(x)=1-\frac{n}{x}$，

令$f'_n(x)>0$得$x>n$，

所以$f(x)$在$(n，+\infty)$上单调递增，

对于B：$f_n(x)$有两个零点，方程$\frac{1}{n}=\frac{lnx}{x}$有两个根，

令$g(x)=\frac{lnx}{x}$，则$g'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}$，

可得$g(x)$在$(0，e)$上单调递增，在$(e，+\infty)$上单调递减，

所以$g(x)$在$x=e$处取得极大值$g(e)=\frac{1}{e}$，

所以$\frac{1}{n}<\frac{1}{e}$，$n>e$，故B正确；

对于C：由上可得$x_n<e<y_n(n\in N^*)$，

又$\frac{1}{n}=\frac{lnx_n}{x_n}$，$\frac{1}{n+1}=\frac{lnx_{n+1}}{x_{n+1}}$，

由$g(x)$的单调性可得，

$\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}$，

所以$x_{n+1}<x_n$，$y_{n+1}>y_n$，

所以$x_{n+1}-x_n<y_{n+1}-y_n$，故C正确；

对于D：由已知$f'_n(\theta)=\frac{f_n(\beta)-f_n(\alpha)}{\beta-\alpha}=1-\frac{n(ln\beta-ln\alpha)}{\beta-\alpha}$，

而$f'(\frac{\alpha+\beta}{2})=1-\frac{2n}{\alpha+\beta}$，

所以$f'_n(\theta)-f'_n(\frac{\alpha+\beta}{2})=-\frac{n(ln\beta-ln\alpha)}{\beta-\alpha}+\frac{2n}{\alpha+\beta}=\frac{-n}{\beta-\alpha}(ln\frac{\beta}{\alpha}-\frac{2(\beta-\alpha)}{\beta+\alpha})$，

令$t=\frac{\beta}{\alpha}(t>1)$，则$ln\frac{\beta}{\alpha}-\frac{2(\beta-\alpha)}{\beta+\alpha}=lnt-\frac{2(t-1)}{t+1}$，

所以$g(t)$在$(1，+\infty)$单调递增，

所以$g(t)>g(1)=0$，

所以$ln\frac{\beta}{\alpha}-\frac{2(\beta-\alpha)}{\beta+\alpha}>0$，

因为$0<\alpha<\beta$，

所以$\beta-\alpha>0$，

所以$\frac{-\alpha}{\beta-\alpha}<0$，

所以$f'_n(\theta)-f'_n(\frac{\alpha+\beta}{2})<0$，

所以$f'_n(\theta)<f'_n(\frac{\alpha+\beta}{2})$，

又$f'_n(x)=1-\frac{n}{x}$在$(0，+\infty)$上单调递增，

所以$\theta<\frac{\alpha+\beta}{2}$，

即$2\theta<\alpha+\beta$，故D正确，

故选：BCD．

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

1. 解：$(1+x)^6$的展开式的通项为$C_6^r x^r$，

则$(a+x)(1+x)^6$的展开式中x^2的系数为$aC_6^2+1\times C_6^1=15a+6a=21a$，

则$21a=21$，解得$a=1$．

故答案为：1．

2. 解：令$f(x)=sin\frac{\pi x}{2}$，

则$f(x)$的定义域为R，满足①；

$\because f(-x)=sin(-\frac{\pi x}{2})=-sin\frac{\pi x}{2}=-f(x)$，

$\therefore f(x)$是奇函数，满足②；

又$f(x+1)=sin\frac{\pi}{2}(x+1)=cos\frac{\pi x}{2}$是偶函数，满足③，

故$f(x)=sin\frac{\pi x}{2}$为同时满足性质①②③的函数，

故答案为：$sin\frac{\pi x}{2}$(不唯一).

3. 解：$\because$与3^n互质的数为：

1，2，4，5，7，8，10，11，13，•••，3^n-2，3^n-1，

共有$(3-1)\cdot 3^{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$个，

$\therefore \varphi(3^n)=2\cdot 3^{n-1}$，

$\therefore log_3\varphi(3^{2023})=log_3(2\times 3^{2022})=2022+log_3 2$.

故答案为：$2022+log_3 2$.

4. 解：设直线l的方程为$y=kx+\frac{4}{3}$，即$3kx-3y+4=0$，

再设直线OA、OB的方程分别为$y=k_1x$、$y=k_2x$，即$k_1x-y=0$、$k_2x-y=0$，

$\because \angle AOB$的平分线过点$E(1,1)$，$\therefore \frac{|k_1-1|}{\sqrt{{k_1}^2+1}}=\frac{|k_2-1|}{\sqrt{{k_2}^2+1}}$，

整理得$(k_1-k_2)(k_1k_2-1)=0$，即$k_1k_2=1$，

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$\frac{y_1}{x_1}\bullet\frac{y_2}{x_2}=1$，即$x_1x_2=y_1y_2$，

联立$\begin{cases}y=kx+\frac{4}{3}\\ y^2=4x\end{cases}$，得$3ky^2-12y+16=0$.

$\therefore \Delta=144-64\times 3k>0$，即$k<\frac{3}{4}$.

$y_1+y_2=\frac{4}{k}$，$y_1y_2=\frac{16}{3k}$，

又$x_1x_2=\frac{1}{16}(y_1y_2)^2$，$\therefore y_1y_2=\frac{1}{16}(y_1y_2)^2$，

可得$\frac{16}{3k}=\frac{16}{9k^2}$，解得$k=\frac{1}{3}$.

故答案为：$\frac{1}{3}$.

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或算步骤.

1. (1)解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，$d\neq 0$，

又$a_1=1$，

则$a_n=1+(n-1)d$，

又$\because \frac{S_n}{S_{2n}}$为常数，

$\therefore \frac{\frac{n[1+1+(n-1)d]}{2}}{\frac{2n[1+1+(2n-1)d]}{2}}=\frac{2-d+nd}{4-2d+4nd}$为常数，

则当$\frac{S_n}{S_{2n}}$为常数时，此常数为$\frac{1}{4}$，

此时$d=2$，

即数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$；

(2)证明：由(1)可得$b_n=\frac{n}{a_na_{n+1}}-\frac{n+1}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}$，

则$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n=(\frac{1}{1\times 3}-\frac{2}{3\times 5})+(\frac{2}{3\times 5}-\frac{3}{5\times 7})+(\frac{3}{5\times 7}-\frac{4}{7\times 9})+\ldots+[\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}]$

$=\frac{1}{3}-\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}<\frac{1}{3}$，

故命题得证.

(1)解：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，$d\neq 0$，

又$a_1=1$，

则$a_n=1+(n-1)d$，

又$\because \frac{S_n}{S_{2n}}$为常数，

$\therefore \frac{\frac{n[1+1+(n-1)d]}{2}}{\frac{2n[1+1+(2n-1)d]}{2}}=\frac{2-d+nd}{4-2d+4nd}$为常数，

则当$\frac{S_n}{S_{2n}}$为常数时，此常数为$\frac{1}{4}$，

此时$d=2$，

即数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$；

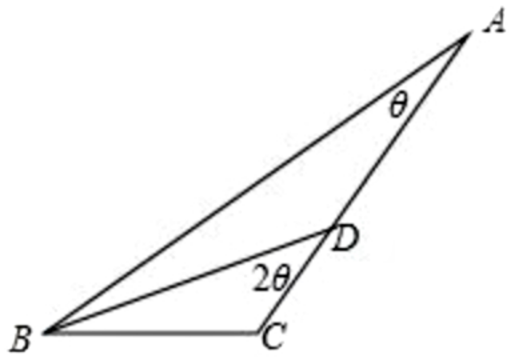
(2)证明：由(1)可得$b_n=\frac{n}{a_na_{n+1}}-\frac{n+1}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}$，

则$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n=(\frac{1}{1\times3}-\frac{2}{3\times5})+(\frac{2}{3\times5}-\frac{3}{5\times7})+(\frac{3}{5\times7}-\frac{4}{7\times9})+\ldots+[\frac{n}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}]$

$=\frac{1}{3}-\frac{n+1}{(2n+1)(2n+3)}<\frac{1}{3}$，

故命题得证．

2. 解：(1)$\triangle ABC$中，$btanA+btanB=\frac{c}{\sqrt{3}cosA}$，所以$\frac{sinA}{cosA}+\frac{sinB}{cosB}=\frac{c}{\sqrt{3}bcosA}$，



由正弦定理得，$\frac{sin(A+B)}{cosAcosB}=\frac{sinC}{\sqrt{3}sinBcosA}$，

因为$sin(A+B)=sin(\pi-C)=sinC$，

所以$\frac{sinC}{cosAcosB}=\frac{sinC}{\sqrt{3}sinBcosA}$；

又因为$C\in(0，\pi)$，所以$sinC\neq0$，所以$\sqrt{3}sinB=cosB$，即$tanB=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

又因为$B\in(0，\pi)$，所以$B=\frac{\pi}{6}$．

(2)因为D是AC边上的点，且$AD=3DC=3$，$\angle A=\angle ABD=\theta$，

所以$\angle BDC=2\theta$，$AD=BD=3$，$DC=1$，$AC=4$，

在$\triangle ABC$中，由正弦定理得，$\frac{BC}{sin\theta}=\frac{AC}{sin\angle ABC}$，

所以$BC=\frac{4sin\theta}{sin\frac{\pi}{6}}=8sin\theta$，

在$\triangle BDC$中，由余弦定理得，$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CDcos2\theta=10-6cos2\theta$，

所以$64sin^2\theta=10-6cos2\theta$，所以$52sin^2\theta=4$，解得$sin^2\theta=\frac{1}{13}$，

又因为$\theta\in(0，\frac{\pi}{2})$，所以$sin\theta=\frac{\sqrt{13}}{13}$．

3. 解：(1)过A在平面ABB_1A_1内作$AD\perp B_1A_1$，垂足为D，

$\because$侧面A_1ACC_1为矩形，$\therefore CA\perp AA_1$，又$AB\perp AC$，

$\therefore CA\perp$平面ABB_1A_1，$CA\subset$平面ABC，$\therefore$平面$ABC\perp$平面ABB_1A_1，

$AD\subset$平面ABB_1A_1，$\therefore AD\perp$平面ABC，

$\because$三棱锥C_1-ABC的体积为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\therefore\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\therefore\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times2\times AD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore AD=\sqrt{3}$，

$\because\angle A_1AB=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore\angle A_1AD=\frac{\pi}{6}$，$\therefore AA_1=2$；

(2)存在E满足题意，$C_1E=2$．

理由如下：如图，以AB，AC，AD分别为坐标轴建立如图所示的空间直角坐标系，

则$A_1(-1，0，\sqrt{3})$，$B(2，0，0)$，$C(0，2，0)$，$C_1(-1，2，\sqrt{3})$，

设$\overrightarrow{C_1E}=\lambda\overrightarrow{C_1C}$，$\lambda\in[0，1]$，则$E(\lambda-1,2，\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，

$\therefore\overrightarrow{AE}=(\lambda-1,2，\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{A_1B}=(3，0，-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{A_1C}=(1，2，-\sqrt{3})$．

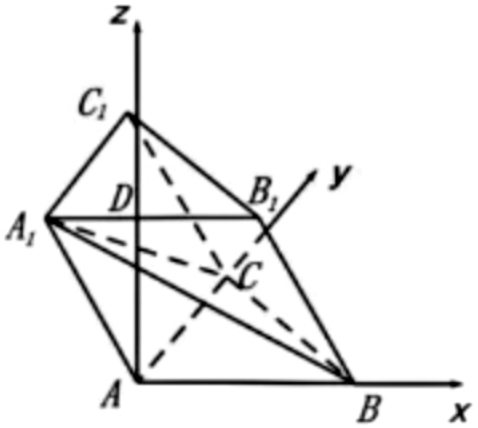
设平面A_1BC的一个法向量为$\overrightarrow{m}=(x，y，z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{m}\bullet\overrightarrow{A_1B}=0\\ \overrightarrow{m}\bullet\overrightarrow{A_1C}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}3x-\sqrt{3}z=0\\ x+2y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，

令$z=\sqrt{3}$，则$x=y=1$，

$\therefore$平面A_1BC的一个法向量为$\overrightarrow{m}=(1，1，\sqrt{3})$，

设直线AE与平面A_1BC所成角为θ，



则$sin\theta=\frac{|\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{m}|}{|\overrightarrow{AE}|\bullet|\overrightarrow{m}|}=\frac{|2-\lambda|}{\sqrt{\lambda^2-2\lambda+2}\bullet\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

解得$\lambda=1$，$\therefore$存在E满足题意，$\therefore C_1E=2$．

4. 解：(1)X可能取值为2，3．

$P(X=2)=p^2+(1-p)^2=2p^2-2p+1$，$P(X=3)=2p(1-p)=-2p^2+2p$，

所以$E(X)=2(2p^2-2p+1)+3(-2p^2+2p)=-2p^2+2p+2$，即$E(X)=-2(p-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{2}$，

则当$p=\frac{1}{2}$时，$E(X)$取得最大值．

(2)当$p=\frac{1}{2}$时，双方前两天的比分为2：0或0：2的概率均为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；

比分为2：1或1：2的概率均为$2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，

$P(Y\le5)$，则$Y=4$或$Y=5$，

$Y=4$即获胜方两天均为2：0获胜，不妨设A获胜，

概率为$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$，同理$B$获胜，概率为$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$，

故$P(Y=4)=2\times\frac{1}{16}=\frac{1}{8}$；

$Y=5$即获胜方前两天的比分为2：0和2：1或者2：0和0：2再加附加赛，

不妨设最终A部获胜，

当前两天的比分为2：0和2：1时，

先从两天中选出一天，比赛比分为2：1，三场比赛前两场，A部一胜一负，第三场比赛A获胜，另外一天比赛比分为2：0，

故概率为$C_2^1\bullet(C_2^1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$，

当前两天比分为2：0和0：2，附加赛A获胜时，两天中选出一天，比赛比分为2：0，

概率为$C_2^1\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$，

故最终A部获胜的概率为$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$，

同理B部胜，概率为$\frac{3}{16}$，

故$P(Y=5)=2\times\frac{3}{16}=\frac{3}{8}$，

所以$P(Y\leq 5)=P(Y=4)+P(Y=5)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$．

5. 解：(1)设$|MF_2|=2r$，D为线段$|MF_2|$的中点，

依题意，得：$|OD|=2\sqrt{2}-r$，$|MF_1|=4\sqrt{2}-2r$，

所以$2a=|MF_1|+|MF_2|=4\sqrt{2}-2r+2r=4\sqrt{2}$，$a=2\sqrt{2}$，

又$c=2$，所以$b^2=a^2$-c^2=8-4=4，

所以椭圆K的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$．

(2)依题意，当直线l斜率为0时，不符合题意；

当直线l斜率不为0时，设直线l方程为$x=my+2(m\neq 0)$，

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\\ x=my+2\end{cases}$，得$(m^2+2)y^2+4my-4=0$，

易知$\Delta=16m^2+16(m^2+2)>0$，

设$M(x_1，y_1)$，$N(x_2，y_2)$，

则$y_1+y_2=-\frac{4m}{m^2+2}$，$y_1\cdot y_2=-\frac{4}{m^2+2}$，

因为$ME\perp x$轴，$NQ\perp x$轴，所以$E(x_1，0)$，$Q(x_2，0)$，

所以直线$QM：y=\frac{y_1}{x_1-x_2}(x-x_2)$，①

直线$NE：y=\frac{y_2}{x_2-x_1}(x-x_1)$，②

联立①②，解得$x_p=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{(my_1+2)y_2+(my_2+2)y_1}{y_1+y_2}=2+\frac{2my_1y_2}{y_1+y_2}=4$，

因为$ME\parallel NQ$，ME与直线x=4平行，

所以$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}|NQ|\cdot|x_P-x_1|=\frac{1}{2}|y_2|\cdot|4-x_1|=\frac{1}{2}|2y_2-my_1y_2|$，

因为$\frac{my_1y_2}{y_1+y_2}=1$，

所以$S_{\triangle PMN}=\frac{1}{2}|2y_2-(y_1+y_2)|=\frac{1}{2}|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{2\sqrt{2m^2+2}}{m^2+2}$，

由$\frac{2\sqrt{2m^2+2}}{m^2+2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，解得$m=\pm\sqrt{2}$，

故存在直线的方程为$x-\sqrt{2}y-2=0$或$x+\sqrt{2}y-2=0$，使得$\triangle PMN$的面积等于$\frac{\sqrt{6}}{2}$．

6. 证明：(1)由已知有$lnx_0=\frac{x_0+1}{x_0-1}$，$f\prime(x)=\frac{1}{x}$，

曲线$y=f(x)$在点$A(x_0，lnx_0)$处的切线方程为：$y-lnx_0=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，

即：$y=\frac{1}{x_0}x-1+lnx_0$，将$lnx_0=\frac{x_0+1}{x_0-1}$代入即有：$y=\frac{1}{x_0}x+\frac{2}{x_0-1}$，

由$y=e^x$得$y'=e^x$，令$e^x=\frac{1}{x_0}$得：$x=ln\frac{1}{x_0}$，此时$y=\frac{1}{x_0}$，

可得：曲线$y=e^x$在点$(ln\frac{1}{x_0}，\frac{1}{x_0})$处的切线方程为：

$y-\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x_0}(x-ln\frac{1}{x_0})=\frac{1}{x_0}x+\frac{1}{x_0}lnx_0$，将$lnx_0=\frac{x_0+1}{x_0-1}$代入化简，

可得：$y=\frac{1}{x_0}x+\frac{2}{x_0-1}$，

故曲线$y=f(x)$在点$A(x_0，lnx_0)$处的切线也是曲线$y=e^x$的切线；

(2)$\because F(x)=f(x)-g(x)=lnx-x+\frac{2}{x}(x>0)$，

$\therefore F\prime(x)=\frac{1}{x}-1-\frac{2}{x^2}$，令$F'(x_1)=F'(x_2)=m$，

得：$\begin{cases}\frac{2}{{x_1}^2}-\frac{1}{x_1}+1+m=0\\ \frac{2}{{x_2}^2}-\frac{1}{x_1}+1+m=0\end{cases}$，

$\therefore\frac{1}{x_1}，\frac{1}{x_2}$为方程$2t^2-t+1+m=0$的两根，

$\therefore\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}$即：$2(x_1+x_2)=x_1x_2$，

$\therefore x_1x_2=2(x_1+x_2)>4\sqrt{x_1x_2}$，$\therefore x_1x_2>16$，

$\therefore F(x_1)+F(x_2)=(lnx_1-x_1+\frac{2}{x_1})+(lnx_2-x_2+\frac{2}{x_2})$

$=(lnx_1+lnx_2)-(x_1+x_2)+(\frac{2}{x_1}+\frac{2}{x_2})$

$=lnx_1x_2-\frac{x_1x_2}{2}+1$，

令$t=x_1x_2>16$，则$ln(x_1x_2)-\frac{x_1x_2}{2}+1=lnt-\frac{t}{2}+1$，

令$h(t)=lnt-\frac{t}{2}+1(t>16)$，则$h\prime(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2}<0(t>16)$，

$\therefore h(t)$在$(16，+\infty)$单调递减，$h(t)<h(16)=ln16-7=4ln2-7$，

即$F(x_1)+F(x_2)<4ln2-7$．