福建省部分地市2023届高中毕业班第一次质量检测

数学试题

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 若集合A，B，U满足：$A \subsetneqq B \subsetneqq U$，则$U=$（　　）

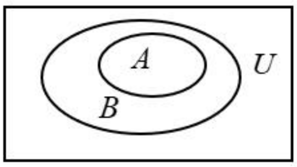
A. $A\cup \complement_U B$　　　　B. $B\cup \complement_U A$　　　　C. $A\cap \complement_U B$　　　　D. $B\cap \complement_U A$

【答案】B

【解析】

【分析】有集合关系，作出Venn图，数形结合即可求解.

【详解】由集合A，B，U满足：$A \subsetneqq B \subsetneqq U$，$\therefore \complement_U B \subseteq \complement_U A$，如图所示：



$\therefore A\cup \complement_U A=U$，$B\cup \complement_U A=U$，$B\cup \complement_U B=U$

故选：B

2. 设$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in \mathbf{R})$在复平面内对应的点为$M$，则“点$M$在第四象限”是“$ab<0$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　　B. 必要不充分条件　　　C. 既不充分也不必要条件 D. 充要条件

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数的几何意义解决即可.

【详解】由题知，$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in \mathbf{R})$在复平面内对应的点为$M(a,b)$，

因为点M在第四象限，即$a>0,b<0$，

$ab<0$，即$\begin{cases}a>0\\b<0\end{cases}$，或$\begin{cases}a<0\\b>0\end{cases}$，

所以“点M在第四象限”是“$ab<0$”的充分不必要条件，

故选：A

3. 设$a=\log_5 8,b=2^{1.3},c=0.7^{1.3}$，则$a$，$b$，$c$的大小关系为（　　）

A. $c<b<a$　　B. $b<a<c$　　C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

【答案】D

【解析】

【分析】根据指数函数和对数函数的单调性结合中间量法即可求解.

【详解】因为$1=\log_5 5<\log_5 8<\log_5 25=2$，所以$1<a<2$，

因为$2^{1.3}>2^1=2$，所以$b>2$，又因为$0<0.7^{1.3}<0.7^0=1$，所以$0<c<1$，

所以$c<a<b$，

故选：D.

4. 函数$f(x)=a\sin x+b\cos 2x+c\sin 4x(a,b,c\in\mathbf{R})$的最小正周期不可能是（　　）

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. $\frac{3}{2}\pi$　　D. 2π

【答案】C

【解析】

【分析】令a、b、c中的两个等于零分类，结合三角函数最小正周期，即可判断选项A，B，D；

而若$T=\frac{3\pi}{2}$时，$f(0)=f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$，$f(\pi)=f\left(\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$，即可化简得出$a=b=0$，再分类为$c=0$与$c\neq 0$判断其周期，与假设矛盾，即可证明最小正周期不可能是$\frac{3}{2}\pi$.

【详解】当$a=b=0$，$c\neq 0$时，函数$f(x)=c\sin 4x$，最小正周期为$T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，故选项A可能；

当$a=c=0$，$b\neq 0$时，函数$f(x)=b\cos 2x$，最小正周期为$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故选项B可能；

当$b=c=0$，$a\neq 0$时，函数$f(x)=a\sin x$，最小正周期为$T=2\pi$，故选项D可能；

而对于选项C：

$\because f(0)=0+b\cos 0+0=b$，$f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=a\sin\frac{3\pi}{2}+b\cos 3\pi+c\sin 6\pi=-a-b$，

则若$T=\frac{3\pi}{2}$时，$b=-a-b$，即$2b=-a$，

$\because f(\pi)=a\sin\pi+b\cos 2\pi+c\sin 4\pi=b$，$f\left(\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=a\sin\frac{5\pi}{2}+b\cos 5\pi+c\sin 10\pi=a-b$，

则若$T=\frac{3\pi}{2}$时，$b=a-b$，即$2b=a$，

故若$T=\dfrac{3\pi}{2}$时，$2b=-a=a$，则$a=0$，且$b=0$，

此时当$c=0$时，$f\left(x\right)=0$，不满足周期为$T=\dfrac{3\pi}{2}$，

当$c\neq 0$时，$f\left(x\right)=c\sin 4x$，也不满足周期为$T=\dfrac{3\pi}{2}$，

与假设矛盾，故函数$f\left(x\right)=a\sin x+b\cos 2x+c\sin 4x\left(a,b,c\in \mathbf{R}\right)$的最小正周期不可能是$\dfrac{3}{2}\pi$，

故选：C.

5. 过抛物线$C:y^2=4x$的焦点作直线l，l交C于M，N两点，若线段MN中点的纵坐标为2，则$|MN|=$（　　）

A. 10　　B. 9　　C. 8　　D. 7

【答案】C

【解析】

【分析】设直线MN的方程为$x-1=my$，联立抛物线方程得$y^2-4my-4=0$，利用韦达定理求出m值，再利用弦长公式即可.

【详解】由抛物线方程知焦点坐标为$\left(1,0\right)$，

设直线MN的方程为$x-1=my$，联立$y^2=4x$得$y^2-4my-4=0$，

设$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，则$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，

则$\dfrac{y_1+y_2}{2}=2m=2$，解得$m=1$，

则$\left|MN\right|=\sqrt{m^2+1}\left|y_1-y_2\right|=\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1^2+1}\cdot\sqrt{4^2+4\times 4}=8$，

故选：C.

6. 函数$f(x)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)(\omega\in\mathbf{R})$恒有$f\left(x\right)\leq f\left(2\pi\right)$，且$f\left(x\right)$在$\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$上单调递增，则$\omega$的值为（　　）

A. $-\dfrac{5}{6}$　　B. $\dfrac{1}{6}$　　C. $\dfrac{7}{6}$　　D. $\dfrac{1}{6}$或$\dfrac{7}{6}$

【答案】B

【解析】

【分析】由题意可得$x=2\pi$时$f\left(x\right)$取得最大值，可得$\omega=\dfrac{1}{6}+k,k\in\mathbf{Z}$.根据单调性可得$\dfrac{\pi}{3}-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\leq\dfrac{T}{2}$，

即$0<|\omega|\le 2$.当$0<\omega\le 2$时，根据$\begin{cases}-\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\ge -\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\le \frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$,$k\in\mathbf{Z}$可求$\omega$的值；若$\omega=-\frac{5}{6}$，根据单调性可知不满足题意，从而可求解.

【详解】易知$\omega\ne 0$，因为恒有$f\left(x\right)\le f\left(2\pi\right)$，所以当$x=2\pi$时$f\left(x\right)$取得最大值，

所以$2\pi\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得$\omega=\frac{1}{6}+k,k\in\mathbf{Z}$.

因为$f\left(x\right)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增，所以$\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\le\frac{T}{2}$,即$\frac{2\pi}{|\omega|}\ge\pi$，得$0<|\omega|\le 2$.

当$0<\omega\le 2$时，

因为$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，所以$\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\right]$.

因为$f\left(x\right)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增，

所以$\begin{cases}-\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\ge -\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\le \frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$,$k\in\mathbf{Z}$,得$\begin{cases}\omega\le 4-12k\\ \omega\le 1+6k\end{cases}$,$k\in\mathbf{Z}$.

所以$4-12k>0$，且$1+6k>0$，$k\in\mathbf{Z}$，解得$-\frac{1}{6}<k<\frac{1}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$.

故$k=0,\omega=\frac{1}{6}$.

当$\omega=-\frac{5}{6}$，$f(x)=2\sin\left(-\frac{5}{6}x+\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(\frac{5}{6}x-\frac{\pi}{6}\right)$，

因为$x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，所以$\frac{5}{6}x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{11\pi}{36},\frac{\pi}{9}\right]$，

故$f\left(x\right)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递减，不满足题意.

故选:B.

7. 在正四棱台$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=2AA_1=2A_1B_1=2\sqrt{2}$，且各顶点都在同一球面上，则该球体的表面积为（　　）

A. 20π　　B. $5\sqrt{5}\pi$　　C. 10π　　D. 5π

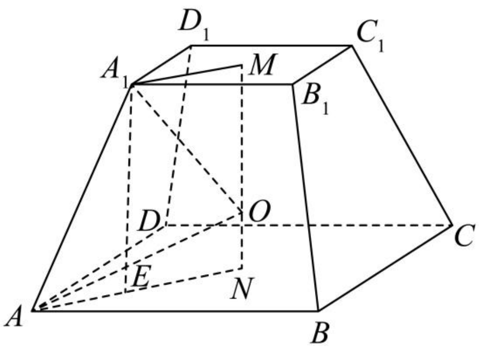
【答案】A

【解析】

【分析】根据题意画出图形，由图构造直角三角形，即可求得 R^2，由求得表面积公式求得球体的表面积.

【详解】如图所示的正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$， $AB=2AA_1=2A_1B_1=2\sqrt{2}$，取上下两个底面的中心 M,N，连接 MN， A_1M， AN，过点 A_1 作底面的垂线与 AN 相交于点 E，

因为四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱台，所以外接球的球心一定在 MN 上，在 MN 上取一点 O 为球心，连接 OA,OA_1，则 $OA=OA_1=R$，设 $ON=h$，



因为 $AB=2AA_1=2A_1B_1=2\sqrt{2}$，所以 $AN=2,A_1M=1$，

$MN=A_1E=\sqrt{AA_1{}^2-AE^2}=\sqrt{AA_1{}^2-(AN-EN)^2}=\sqrt{AA_1{}^2-(AN-A_1M)^2}=1$，

在 $Rt\triangle OAN$ 中， $OA^2=AN^2+ON^2$，即 $R^2=2^2+h^2$，

在 $Rt\triangle OA_1M$ 中， $OA_1{}^2=OM^2+A_1M^2$，即 $R^2=(1-h)^2+1^2$，

解得 $R^2=5$，所以 $S_{球}=4\pi R^2=20\pi$，

故选：A.

8. 双曲线 $C:\dfrac{y^2}{3}-x^2=1$ 的下焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，若过 A，B 和点 $M(0,\sqrt{7})$ 的圆的圆心在 x 轴上，则直线 l 的斜率为（　　）

A. $\pm\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　B. $\pm\sqrt{2}$　　C. ±1　　D. $\pm\dfrac{3}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意设出直线 AB 的方程，与曲线方程联立，结合韦达定理求出 AB 的中点坐标和弦长 AB，然后利用垂径定理可得直线 l 的斜率.

【详解】由题意可知：$F(0,-2)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB 的中点为 P，过点 A,B,M 的圆的圆心坐标为 $G(t,0)$，则 $|GM|=\sqrt{t^2+7}=r$，

由题意知：直线 AB 的斜率存在且不为 0，设直线 AB 的方程为：$y=kx-2$，

联立方程组 $\begin{cases} y=kx-2 \\ \dfrac{y^2}{3}-x^2=1 \end{cases}$，消元可得：$(k^2-3)x^2-4kx+1=0$，

则 $k^2-3\neq 0$，$\Delta=16k^2-4(k^2-3)=12k^2+12>0$，

由韦达定理可得：$x_1+x_2=\dfrac{4k}{k^2-3}$，$x_1x_2=\dfrac{1}{k^2-3}$，所以 AB 的中点 P 的坐标

$x_P=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2k}{k^2-3},y_P=kx_P-2=\dfrac{6}{k^2-3}$，则 $P(\dfrac{2k}{k^2-3},\dfrac{6}{k^2-3})$，由圆的性质可知：圆心与弦中点连线的斜率垂直于弦所在的直线，所以 $k_{PG}=\dfrac{\dfrac{6}{k^2-3}-0}{\dfrac{2k}{k^2-3}-t}=-\dfrac{1}{k}$，

整理可得：$t=\dfrac{8k}{k^2-3}$　（*），则圆心 $G(t,0)$ 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|kt-2|}{\sqrt{1+k^2}}$，

由弦长公式可得：$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\dfrac{16k^2-4k^2+12}{(k^2-3)^2}}$，

由垂径定理可得：$r^2=d^2+(\dfrac{1}{2}|AB|)^2$，

也即 $t^2+7=\dfrac{(kt-2)^2}{1+k^2}+(1+k^2)\dfrac{3(k^2+1)}{(k^2-3)^2}$，将（*）代入可得：

$$\frac{64k^2}{(k^2-3)^2}+7=\frac{(\frac{8k^2}{k^2-3}-2)^2}{1+k^2}+\frac{3(1+k^2)^2}{(k^2-3)^2}，即 \frac{64k^2}{(k^2-3)^2}+7=\frac{36k^2+36}{(k^2-3)^2}+\frac{3(1+k^2)^2}{(k^2-3)^2}，$$

整理可得：$k^4-5k^2+6=0$，则 $(k^2-2)(k^2-3)=0$，因为 $k^2-3\neq 0$，

所以 $k^2-2=0$，则 $k=\pm\sqrt{2}$，

故选：B.

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 记正项等比数列$\left\{a_n\right\}$的前n项和为S_n，则下列数列为等比数列的有（　　）

A. $\left\{a_{n+1}+a_n\right\}$　　B. $\left\{a_{n+1}a_n\right\}$　　C. $\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$　　D. $\left\{S_nS_{n+1}\right\}$

【答案】AB

【解析】

【分析】根据等比数列的定义和前n项公式和逐项分析判断.

【详解】由题意可得：等比数列$\left\{a_n\right\}$的首项$a_1>0$，公比$q>0$，即$a_n>0,S_n>0$，

对A：$a_{n+1}+a_n>0$，且$\dfrac{a_{n+2}+a_{n+1}}{a_{n+1}+a_n}=\dfrac{\left(a_{n+1}+a_n\right)q}{a_{n+1}+a_n}=q$，即$\left\{a_{n+1}+a_n\right\}$为等比数列，A正确；

对B：$a_{n+1}a_n>0$，且$\dfrac{a_{n+2}a_{n+1}}{a_{n+1}a_n}=\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=q^2$，即$\left\{a_{n+1}a_n\right\}$为等比数列，B正确；

$\because S_n=\begin{cases}na_1,q=1\\ \dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q},q\neq1\end{cases}$，则有：

对C：$\dfrac{\dfrac{S_{n+1}}{a_{n+1}}}{\dfrac{S_n}{a_n}}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\dfrac{1}{q}\cdot\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\begin{cases}\dfrac{n+1}{n},q=1\\ \dfrac{1}{q}\cdot\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q^n},q\neq1\end{cases}$，均不为定值，即$\left\{\dfrac{S_n}{a_n}\right\}$不是等比数列，C错误；

对D：$\dfrac{S_{n+1}S_{n+2}}{S_nS_{n+1}}=\dfrac{S_{n+2}}{S_n}=\begin{cases}\dfrac{n+2}{n},q=1\\ \dfrac{1-q^{n+2}}{1-q^n},q\neq1\end{cases}$，均不为定值，即$\left\{S_nS_{n+1}\right\}$不是等比数列，D错误；

故选：AB.

10. 已知正实数x，y满足$x+y=1$，则（　　）

A. x^2+y的最小值为$\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}$的最小值为8

C. $\sqrt{x}+\sqrt{y}$的最大值为$\sqrt{2}$　　D. $\log_2x+\log_4y$没有最大值

【答案】AC

【解析】

【分析】将$y=1-x$代入x^2+y，根据二次函数的性质即可判断A；根据$\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)\left(x+y\right)$及基本

不等式可判断 B；$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=1+2\sqrt{xy}$，根据基本不等式可判断 C；$\log_2 x+\log_4 y=\log_2\left(x\sqrt{y}\right)$，$x^2y=x^2\left(1-x\right)=\frac{1}{2}x\cdot x\cdot\left(2-2x\right)$，根据基本不等式可判断 D.

【详解】因为 x，y 为正实数，且 $x+y=1$，所以 $y=1-x,x\in\left(0,1\right)$.

所以 $x^2+y=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，x^2+y 的最小值为 $\frac{3}{4}$，故 A 正确；

$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\right)\left(x+y\right)=5+\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\geq 5+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{4x}{y}}=9$，

当且仅当 $x=\frac{1}{3},y=\frac{2}{3}$ 时等号成立，故 B 错误；

$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=x+y+2\sqrt{xy}=1+2\sqrt{xy}\leq 1+x+y=2$，

当且仅当 $x=y=\frac{1}{2}$ 时等号成立，

故 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leq\sqrt{2}$，即 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$，故 C 正确；

$\log_2 x+\log_4 y=\log_2 x+\log_2\sqrt{y}=\log_2\left(x\sqrt{y}\right)$，

$x^2y=x^2\left(1-x\right)=\frac{1}{2}x\cdot x\cdot\left(2-2x\right)\leq\frac{1}{2}\left(\frac{x+x+2-2x}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$，

当且仅当 $x=2-2x$，即 $x=\frac{2}{3}$ 时等号成立，

所以 $x\sqrt{y}\leq\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

所以 $\log_2 x+\log_4 y$ 有最大值 $\log_2\frac{2\sqrt{3}}{9}$，故 D 错误.

故选:AC.

11. 平面向量 $\vec{m},\vec{n}$ 满足 $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$，对任意的实数 t，$\left|\vec{m}-\frac{1}{2}\vec{n}\right|\leq|\vec{m}+t\vec{n}|$ 恒成立，则（　　）

A. $\vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 $60°$

B. $(\vec{m}+t\vec{n})^2+(\vec{m}-t\vec{n})^2$ 为定值

C. $|\vec{n}-t\vec{m}|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$

D. $\vec{m}$ 在 $\vec{m}+\vec{n}$ 上的投影向量为 $\frac{1}{2}(\vec{m}+\vec{n})$

【答案】AD

【解析】

【分析】由题意可得：$\vec{m}$与$\vec{n}$的夹角$\theta=60^\circ$，然后根据向量的运算逐项进行检验即可求解.

【详解】设平面向量$\vec{m}$与$\vec{n}$的夹角为θ，

因为对任意的实数 t，$\left|\vec{m}-\frac{1}{2}\vec{n}\right|\le|\vec{m}+t\vec{n}|$恒成立，

即$\vec{m}^2-\vec{m}\cdot\vec{n}+\frac{1}{4}\vec{n}^2\le\vec{m}^2+2t\vec{m}\cdot\vec{n}+t^2\vec{n}^2$恒成立，又$|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$，

也即$t^2+2t\cos\theta+\cos\theta-\frac{1}{4}\ge 0$对任意的实数$t$恒成立，

所以$\Delta=4\cos^2\theta-4\cos\theta+1=(2\cos\theta-1)^2\le 0$，则$\cos\theta=\frac{1}{2}$，所以$\theta=60^\circ$，

故选项A 正确；

对于B，因为$(\vec{m}+t\vec{n})^2+(\vec{m}-t\vec{n})^2=1+2t\cos 60^\circ+t^2+1+t^2-2t\cos 60^\circ=2+2t^2$随$t$的变化而变化，故选项B 错误；

对于C，因为$|\vec{n}-t\vec{m}|=\sqrt{|\vec{n}-t\vec{m}|^2}=\sqrt{1+t^2-2t\cos 60^\circ}=\sqrt{t^2-t+1}$，由二次函数的性质可知：当$t=\frac{1}{2}$时，$|\vec{n}-t\vec{m}|$取最小值$\frac{\sqrt{3}}{2}$，故选项C 错误；

对于D，$\vec{m}+\vec{n}$向量上的一个单位向量$\vec{e}=\frac{\vec{m}+\vec{n}}{\left|\vec{m}+\vec{n}\right|}=\frac{\vec{m}+\vec{n}}{\sqrt{3}}$，由向量夹角公式可得：

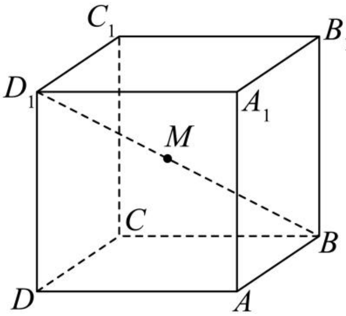
$$\cos<\vec{m},(\vec{m}+\vec{n})>=\frac{\vec{m}\cdot(\vec{m}+\vec{n})}{\left|\vec{m}\right|\left|\vec{m}+\vec{n}\right|}=\frac{1+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

由投影向量的计算公式可得：$\vec{m}$在$\vec{m}+\vec{n}$上的投影向量为

$$\left|\vec{m}\right|\cdot\cos<\vec{m},(\vec{m}+\vec{n})>\vec{e}=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{(\vec{m}+\vec{n})}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\vec{m}+\vec{n})$$，故选项D 正确，

故选：AD.

12. 如图，在棱长为 1 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点 M 为线段BD_1上的动点（含端点），则（　　）



A. 存在点 M，使得 $CM \perp$ 平面 A_1DB

B. 存在点 M，使得 CM // 平面 A_1DB

C. 不存在点 M，使得直线 C_1M 与平面 A_1DB 所成的角为 $30°$

D. 存在点 M，使得平面 ACM 与平面 A_1BM 所成的锐角为 $45°$

【答案】BCD

【解析】

【分析】建立空间直角坐标系，利用空间向量夹角公式、法向量的性质逐一判断即可.

【详解】建立如图所示的空间直角坐标系，

$C(0,0,0), B(0,1,0), A(1,1,0), D(1,0,0), D_1(1,0,1), A_1(1,1,1), C_1(0,0,1)$，

设 $\overrightarrow{D_1M}=\lambda\overrightarrow{D_1B} \Rightarrow M(1-\lambda,\lambda,1-\lambda)\left(\lambda\in[0,1]\right)$，

设平面 A_1DB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{DB}=(-1,1,0), \overrightarrow{BA_1}=(1,0,1), \overrightarrow{CM}=(1-\lambda,\lambda,1-\lambda)$，

则有 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x+y=0\\ x+z=0\end{cases} \Rightarrow \vec{n}=(1,1,-1)$，

假设存在点 M，使得 $CM \perp$ 平面 A_1DB，所以有 $\overrightarrow{CM}//\vec{n}$，

所以有 $\dfrac{1-\lambda}{1}=\dfrac{\lambda}{1}=\dfrac{1-\lambda}{-1} \Rightarrow \lambda\in\varnothing$，因此假设不成立，因此选项 A 不正确；

假设存在点 M，使得 CM // 平面 A_1DB，

所以有 $\overrightarrow{CM}\perp\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{CM}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow 1-\lambda+\lambda-1+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0\in[0,1]$，所以假设成立，因此选项 B 正确；

假设存在点 M，使得直线 C_1M 与平面 A_1DB 所成的角为 $30°$，$\overrightarrow{C_1M}=(1-\lambda,\lambda,-\lambda)$，

所以有 $\cos\langle\overrightarrow{C_1M},\vec{n}\rangle=\sin 30^{\circ}=\dfrac{\left|\overrightarrow{C_1M}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{C_1M}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{|1-\lambda+\lambda+\lambda|}{\sqrt{3}\times\sqrt{(1-\lambda)^2+\lambda^2+\lambda^2}}=\dfrac{1}{2}$，

解得 $\lambda=\dfrac{7-3\sqrt{6}}{5}<0$，$\lambda=\dfrac{7+3\sqrt{6}}{5}>1$，所以假设不成立，故选项 C 正确；

假设存在点 M，使得平面 ACM 与平面 A_1BM 所成的锐角为 $45°$，

设平面 ACM 、平面 A_1BM 的法向量分别为 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$、$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，

$\overrightarrow{CA}=(1,1,0),\overrightarrow{BM}=(1-\lambda,\lambda-1,1-\lambda)$, 显然 $\lambda\in[0,1)$，

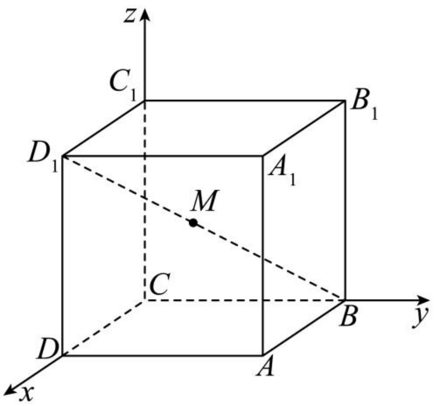
则有 $\begin{cases}\vec{a}\cdot\overrightarrow{CA}=0\\ \vec{a}\cdot\overrightarrow{CM}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+y_1=0\\ (1-\lambda)x_1+\lambda y_1+(1-\lambda)z_1=0\end{cases}$，

当 $\lambda\in[0,1)$ 时，有 $\vec{a}=\left(1,-1,\dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}\right)$

$\begin{cases}\vec{b}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0\\ \vec{b}\cdot\overrightarrow{BM}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2+z_2=0\\ (1-\lambda)x_2+(\lambda-1)y_2+(1-\lambda)z_2=0\end{cases}\Rightarrow\vec{b}=(1,0,-1)$，

所以有 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\left|1+\dfrac{2\lambda-1}{\lambda-1}\right|}{\sqrt{2}\times\sqrt{1+1+\left(\dfrac{2\lambda-1}{1-\lambda}\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\lambda=1$ ，或 $\lambda=\dfrac{1}{3}$，假设成立，选项 D 正确，

故选：BCD



【点睛】

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知空间中三点 $A(1,1,\sqrt{3}),B(1,-1,2),C(0,0,0)$，则点 A 到直线 BC 的距离为__________.

【答案】$\sqrt{3}$

【解析】

【分析】利用向量的模公式及向量的夹角公式，结合同角三角函数的平方关系及锐角三角函数的定义即可求解.

【详解】$\because A(1,1,\sqrt{3}),B(1,-1,2),C(0,0,0)$，

$\therefore\overrightarrow{CA}=(1,1,\sqrt{3}),\overrightarrow{CB}=(1,-1,2)$，$\therefore\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{1^2+1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{5},\left|\overrightarrow{CB}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+(2)^2}=\sqrt{6}$

$\therefore\cos<\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}>=\dfrac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|}=\dfrac{1\times1+1\times(-1)+2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{30}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，

$\therefore \sin < \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} > = \sqrt{1-\cos^2 < \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} >} = \frac{\sqrt{15}}{5}$，

设点 A 到直线 BC 的距离为 d，则

$d = \left|\overrightarrow{CA}\right| \sin < \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} > = \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{15}}{5} = \sqrt{3}$.

故答案为：$\sqrt{3}$.

14. 以下为甲、乙两组按从小到大顺序排列的数据：

甲组：14，30，37，a，41，52，53，55，58，80；

乙组：17，22，32，43，45，49，b，56.

若甲组数据的第 40 百分位数和乙组数据的平均数相等，则 $4a-b=$__________.

【答案】100

【解析】

【分析】根据百分位数和平均数的定义即可列出式子计算求解.

【详解】因为 $10 \times 40\% = 4$，甲组数据的第 40 百分位数为第四个数和第五个数的平均数，

乙组数据的平均数为 $\frac{17+22+32+43+45+49+b+56}{8}$，

根据题意得 $\frac{a+41}{2} = \frac{17+22+32+43+45+49+b+56}{8}$，解得：$4a+164=b+264$，

所以 $4a-b=100$，

故答案为：100.

15. 写出一个同时满足下列三个性质的函数 $f(x)=$__________.

①若 $xy>0$，则 $f(x+y)=f(x)f(y)$；② $f(x)=f(-x)$；③ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

【答案】$\frac{1}{2^{|x|}}$（答案不唯一）

【解析】

【分析】根据函数的三个性质，列出符合条件的函数即可.

【详解】比如 $f(x)=\frac{1}{2^{|x|}}$，$f(x+y)=\frac{1}{2^{|x+y|}}, f(x)f(y)=\frac{1}{2^{|x|}} \cdot \frac{1}{2^{|y|}} = \frac{1}{2^{|x+y|}}$，故 $f(x+y)=f(x)f(y)$，又

$f(-x)=\frac{1}{2^{|-x|}}=\frac{1}{2^{|x|}}=f(x)$，也即 $f(x)=f(-x)$ 成立，

又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

故答案为：$\frac{1}{2^{|x|}}$.

16. 近年来，“剧本杀”门店遍地开花．放假伊始，7 名同学相约前往某“剧本杀”门店体验沉浸式角色扮演型剧本游戏，目前店中仅有可供 4 人组局的剧本，其中 A，B 角色各 1 人，C 角色 2 人．已知这 7 名同学中有 4 名男生，3 名女生，现决定让店主从他们 7 人中选出 4 人参加游戏，其余 3 人观看，要求选出的 4 人中至少有 1 名女生，并且 A，B 角色不可同时为女生．则店主共有________种选择方式．

【答案】348

【解析】

【分析】根据题意，按照选出的女生人数进行分类，分别求出每一类的选择种数，然后相加即可求解.

【详解】由题意，根据选出的女生人数进行分类，

第一类：选出 1 名女生，先从 3 名女生中选 1 人，再从四名男生中选 3 人，然后安排角色，两名男生扮演 A，B 角色有 A_3^2 种，剩余的 1 名男生和女生扮演 C 角色，或 A，B 角色 1 名男生 1 名女生，女生先选有 C_2^1，剩下的一个角色从 3 名男生中选 1 人，则 C_3^1 种，所以共有 $C_3^1C_4^3(A_3^2+C_2^1C_3^1)=144$ 种，

第二类：选出 2 名女生，先从 3 名女生中选 2 人，再从四名男生中选 2 人，然后安排角色，两名男生扮演 A，B 角色有 A_2^2 种，剩余的 2 名女生扮演 C 角色，或 A，B 角色 1 名男生 1 名女生，选出 1 名女生先选角色有 $C_2^1C_2^1$，剩下的一个角色从 2 名男生中选 1 人，则 C_2^1 种，所以共有 $C_3^2C_4^2(A_2^2+C_2^1C_2^1C_2^1)=180$ 种，

第三类：选出 3 名女生，从先从 3 名女生中选 3 人，再从四名男生中选 1 人，然后安排角色，A，B 角色 1 名男生 1 名女生，选出 1 名女生先选角色有 $C_3^1C_2^1$，剩下的一个角色让男生扮演，余下的 2 名女生扮演角色 C，所以共有 $C_3^3C_4^1C_3^1C_2^1=24$ 种，

由分类计数原理可得：店主共有 $144+180+24=348$ 种选择方式，

故答案为：348.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $4S_n=(a_n-1)(a_n+3)(n\in\mathbf{N}^*)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）将数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{2^n\}$ 中所有的项，按照从小到大的顺序排列得到一个新数列 $\{b_n\}$，求 $\{b_n\}$ 的前 50 项和．

【答案】（1）$a_n=2n+1$

（2）2150

【解析】

【分析】(1) 当 $n=1$ 时，$4a_1=4S_1=(a_1-1)(a_1+3)$，得 $a_1=3$，由 $4S_n=(a_n-1)(a_n+3)$，当 $n\geq 2$ 时，有 $4S_{n-1}=(a_{n-1}-1)(a_{n-1}+3)$，作差解决即可；

(2) $a_{50}=101$，又 $2^6<101<2^7$，同时 $a_{44}=89>2^6$，所以 $b_{50}=a_{44}$，分组求和解决即可.

【小问 1 详解】

依题意 $a_n>0$，

当 $n=1$ 时，$4a_1=4S_1=(a_1-1)(a_1+3)$，解得 $a_1=3$，

由 $4S_n=(a_n-1)(a_n+3)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，

当 $n\geq 2$ 时，有 $4S_{n-1}=(a_{n-1}-1)(a_{n-1}+3)$，

作差得：$4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$，

所以 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$，

因为 $a_n+a_{n-1}>0$，

所以 $a_n-a_{n-1}=2(n\geq 2)$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3，公差为 2 的等差数列，

所以 $a_n=2n+1$.

【小问 2 详解】

由 (1) 得，$a_{50}=101$，

又 $2^6<101<2^7$，同时 $a_{44}=89>2^6$，

所以 $b_{50}=a_{44}$

所以 $b_1+b_2+\cdots+b_{50}=(a_1+a_2+\cdots+a_{44})+\left(2^1+2^2+\cdots+2^6\right)$

$$=\frac{44}{2}(a_1+a_{44})+\frac{2\left(2^6-1\right)}{2-1}=2024+126=2150\cdot$$

所以 $\{b_n\}$ 的前 50 项和为 2150.

18. 记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

（1）求$\frac{b}{c}$；

（2）已知$B=3C,c=1$，求$\triangle ABC$的面积.

【答案】（1）$\frac{b}{c}=2$

（2）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】(1)利用平面向量的数量积的定义结合余弦定理即可求出结果；

(2)由正弦定理得到$\sin B=2\sin C$，结合$B=3C,c=1$和两角和则正弦公式求出$B=3C=\frac{\pi}{2}$，进而求出三角形的面积.

【小问1详解】

已知$3bc\cos A+4ac\cos B=ab\cos C$，

代入余弦定理，$3\left(b^2+c^2-a^2\right)+4\left(a^2+c^2-b^2\right)=a^2+b^2-c^2$，

化简得：$4c^2=b^2$，所以$\frac{b}{c}=2$.

【小问2详解】

由正弦定理知$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$即$\sin B=2\sin C$，

又$B=3C$，故$\sin B=\sin 3C=\sin(2C+C)=\sin 2C\cdot\cos C+\cos 2C\cdot\sin C$

$=2\sin C\cdot\left(1-\sin^2 C\right)+\left(1-2\sin^2 C\right)\sin C=3\sin C-4\sin^3 C=2\sin C$，

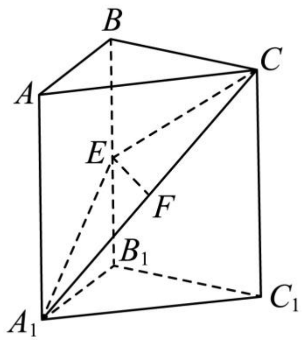
即$3-4\sin^2 C=2$，得$\sin C=\frac{1}{2}$，

故$C=\frac{\pi}{6}$（$C=\frac{5}{6}\pi$舍），

此时，$B=3C=\frac{\pi}{2}$，$b=2c=2AB=2,BC=\sqrt{3}$，

则$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

19. 如图，在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC=\sqrt{2},AB\perp BC$，E，F分别为BB_1,CA_1的中点，且$EF\perp$平面AA_1C_1C.



（1）求 AB 的长；

（2）若 $AA_1=\sqrt{2}$，求二面角 $C-A_1E-A$ 的余弦值.

【答案】（1） $AB=1$

（2） $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】（1）根据线面垂直性质得 $EF\perp A_1C$，结合垂直平分线性质和三角形全等得到 $AB=BC$，结合 $AB\perp BC$ 即可得到 AB 的长；

（2）以点 B_1 为原点，建立合适的空间直角坐标系，写出相关向量，求出平面 CA_1E 和平面 A_1B_1BA 的一个法向量，利用空间向量的二面角求法即可.

【小问 1 详解】

$\because EF\perp$面 AA_1CC_1，又 $A_1C\subset$面 AA_1CC_1，$\therefore EF\perp A_1C$，

又$\because F$ 为 A_1C 的中点，$\therefore EA_1=EC$，

又在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1B_1E$ 、$\mathrm{Rt}\triangle BEC$ 中， $BE=EB_1$，

易证得 $\triangle A_1B_1E\cong\triangle CBE$，

故 $A_1B_1=BC$.

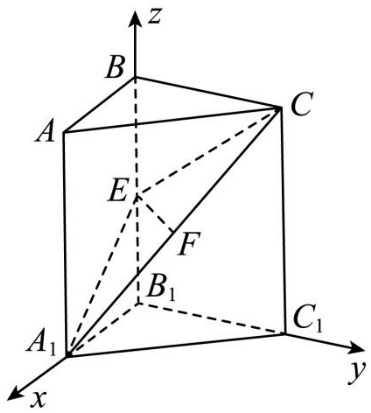
$\because AB=A_1B_1$， $\therefore AB=BC$，

又$\because AB\perp BC$， $AC=\sqrt{2}$，

故 $AB=1$.

【小问 2 详解】

以点 B_1 为原点，建立如图所示的空间直角坐标系 B_1-xyz，



由题意可知 $A_1(1,0,0), E\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right), C(0,1,\sqrt{2})$，

则 $\overrightarrow{A_1E}=\left(-1,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \overrightarrow{A_1C}=(-1,1,\sqrt{2})$，

不妨设 $\vec{m}=\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 是平面 CA_1E 的一个法向量，

那么 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-x_0+\frac{\sqrt{2}}{2}z_0=0\\ -x_0+y_0+\sqrt{2}z_0=0\end{cases}$，

令 $z_0=2$，则 $\vec{m}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},2)$．

又 $B_1C_1\perp$ 面 A_1B_1BA，

故 $\overrightarrow{B_1C_1}=(0,1,0)$ 是平面 A_1B_1BA 的一个法向量．

设 α 为二面角 $C-A_1E-A$ 所成平面角，

则 $\cos\alpha=\frac{\left|\vec{m}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}\right|}{|\vec{m}|\cdot\left|\overrightarrow{B_1C_1}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，

即二面角 $C-A_1E-A$ 的余弦值为 $\frac{1}{2}$．

20. 校园师生安全重于泰山，越来越多的学校纷纷引进各类急救设备．某学校引进 M，N 两种类型的自动体外除颤器（简称 AED）若干，并组织全校师生学习 AED 的使用规则及方法．经过短期的强化培训，在单位时间内，选择 M，N 两种类型 AED 操作成功的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$，假设每次操作能否成功相互独立．

（1）现有某受训学生进行急救演练，假定他每次随机等可能选择 M 或 N 型 AED 进行操作，求他恰好在第二次操作成功的概率；

（2）为激发师生学习并正确操作 AED 的热情，学校选择一名教师代表进行连续两次设备操作展示，下面是两种方案：

方案甲：在第一次操作时，随机等可能的选择 M 或 N 型 AED 中的一种，若第一次对某类型 AED 操作成功，则第二次继续使用该类型设备；若第一次对某类型 AED 操作不成功，则第二次使用另一类型 AED 进行操作.

方案乙：在第一次操作时，随机等可能的选择 M 或 N 型 AED 中的一种，无论第一次操作是否成功，第二次均使用第一次所选择的设备.

假定方案选择及操作不相互影响，以成功操作累积次数的期望值为决策依据，分析哪种方案更好？

【答案】（1）$\dfrac{35}{144}$

（2）见解析

【解析】

【分析】（1）设“操作成功”为事件 S，“选择设备 M”为事件 A，“选择设备 N”为事件 B，结合题意和独立事件的概率计算公式即可求解；

（2）设方案甲和方案乙成功操作累计次数分别为 X，Y，分别求出每一个次数对应的概率，然后求出每种方案对应的均值，进行比较即可得出结论.

【小问 1 详解】

设“操作成功”为事件 S，“选择设备 M”为事件 A，“选择设备 N”为事件 B

由题意，$P\left(A\right)=P\left(B\right)=\dfrac{1}{2},P\left(S\middle|A\right)=\dfrac{2}{3},P\left(S\middle|B\right)=\dfrac{1}{2}$

恰在第二次操作才成功的概率 $P=P(\overline{S})P(S)$，

$$P(S)=P(A)P(S\mid A)+P(B)P(S\mid B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{12},$$

$$P(\overline{S})=1-P(S)=\frac{5}{12}$$

所以恰在第二次操作才成功的概率为 $\dfrac{5}{12}\times\dfrac{7}{12}=\dfrac{35}{144}$.

【小问 2 详解】

设方案甲和方案乙成功操作累计次数分别为 X，Y，则 X，Y 可能取值均为 0，1，2，

$$P(X=0)=P(A)P(\overline{S}\mid A)P(\overline{S}\mid B)+P(B)P(\overline{S}\mid B)P(\overline{S}\mid A)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{6};$$

$$P(X=1)=P(A)P(\overline{S}\mid A)P(S\mid B)+P(A)P(S\mid A)P(\overline{S}\mid A)$$

$$+P\left(B\right)P(\overline{S}\mid B)P(S\mid A)+P\left(B\right)P(S\mid B)P(\overline{S}\mid B)$$

$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{35}{72}$；

$P(X=2)=P(A)P(S|A)P(S|A)+P(B)P(S|B)P(S|B)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{25}{72}$；

所以$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{35}{72}+2\times\frac{25}{72}=\frac{85}{72}$

方法一：$P(Y=0)=P(A)P(\overline{S}|A)P(\overline{S}|A)+P(B)P(\overline{S}|B)P(\overline{S}|B)$

$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{13}{72}$；

$P(Y=1)=P(A)P(\overline{S}|A)P(S|A)+P(A)P(S|A)P(\overline{S}|A)$

$+P(B)P(\overline{S}|B)P(S|B)+P(B)P(S|B)P(\overline{S}|B)$

$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{17}{36}$

$P(Y=2)=P(A)P(S|A)P(S|A)+P(B)P(S|B)P(S|B)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{25}{72}$；

所以$E\left(Y\right)=0\times\frac{13}{72}+1\times\frac{17}{36}+2\times\frac{25}{72}=\frac{7}{6}$

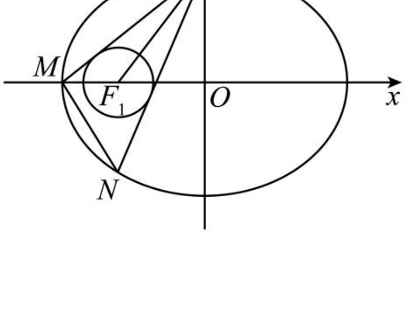
方法二：方案乙选择其中一种操作设备后，进行 2 次独立重复试验，

所以$E(Y)=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{7}{6}$，

决策一：因为$E(X)>E(Y)$，故方案甲更好.

决策二：因为$E(X)$与$E(Y)$差距非常小，所以两种方案均可

21. 已知椭圆$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，其左焦点为$F_1(-2,0)$.



（1）求Γ的方程；

（2）如图，过Γ的上顶点P作动圆F_1的切线分别交Γ于M,N两点，是否存在圆F_1使得$\triangle PMN$是以PN为斜边的直角三角形？若存在，求出圆F_1的半径；若不存在，请说明理由．

【答案】（1）$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$

（2）不存在，理由见解析

【解析】

【分析】（1）根据待定系数法求椭圆标准方程即可；（2）假设存在圆F_1满足题意，当圆F_1过原点O时，直线PN与y轴重合，直线PM的斜率为0，不合题意；不妨设为PM：$y=k_1x+2\left(k_1\neq 0\right)$，$PN$：$y=k_2x+2\left(k_2\neq 0\right)$，$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，圆$F_1$的半径为$r$，得圆心到直线$PN$的距离为$\dfrac{\left|-2k_1+2\right|}{\sqrt{1+k_1^2}}=r$，得$k_1k_2=1$，联立直线$PM$与椭圆方程得$M\left(\dfrac{-8k_1}{1+2k_1^2},\dfrac{2-4k_1^2}{1+2k_1^2}\right)$，进而得$N\left(\dfrac{-8k_1}{2+k_1^2},\dfrac{2k_1^2-4}{2+k_1^2}\right)$，由$k_{MN}=-\dfrac{1}{k_1}$得$\dfrac{-\left(k_1^2+1\right)}{k_1}=-\dfrac{1}{k_1}$，即可解决．

【小问1详解】

由题意设焦距为$2c$，则$c=2$，

由离心率为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$a=2\sqrt{2}$，

则$b^2=a^2-c^2=4$，

Γ的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$．

【小问2详解】

不存在，

证明如下：假设存在圆F_1满足题意，当圆F_1过原点O时，直线PN与y轴重合，

直线PM的斜率为0，不合题意．

依题意不妨设为PM：$y=k_1x+2\left(k_1\neq 0\right)$，

PN：$y=k_2x+2\left(k_2\neq 0\right)$，$M\left(x_1,y_1\right)$，$N\left(x_2,y_2\right)$，圆$F_1$的半径为$r$，

则圆心到直线 PN 的距离为 $\dfrac{|-2k_1+2|}{\sqrt{1+k_1^2}}=r$，

即 k_1,k_2 是关于 k 的方程 $\left(r^2-4\right)k^2+8k+r^2-4=0$ 的两异根，

此时 $k_1k_2=1$，

再联立直线 PM 与椭圆方程 $\begin{cases} y=k_1x+2 \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$ 得 $\left(1+2k_1^2\right)x^2+8k_1x=0$，

所以 $x_P+x_M=\dfrac{-8k_1}{1+2k_1^2}$，即 $x_M=\dfrac{-8k_1}{1+2k_1^2}$，得 $y_M=\dfrac{2-4k_1^2}{1+2k_1^2}$

所以 $M\left(\dfrac{-8k_1}{1+2k_1^2},\dfrac{2-4k_1^2}{1+2k_1^2}\right)$，同理 $N\left(\dfrac{-8k_2}{1+2k_2^2},\dfrac{2-4k_2^2}{1+2k_2^2}\right)$

由 $k_2=\dfrac{1}{k_1}$，得 $N\left(\dfrac{-8k_1}{2+k_1^2},\dfrac{2k_1^2-4}{2+k_1^2}\right)$，

由题意，$PM\perp MN$，即 $k_{MN}=-\dfrac{1}{k_1}$，此时

$$k_{MN}=\frac{\dfrac{2-4k_1^2}{1+2k_1^2}-\dfrac{2k_1^2-4}{2+k_1^2}}{\dfrac{-8k_1}{1+2k_1^2}-\dfrac{-8k_1}{2+k_1^2}}=\frac{\left(-2k_1^2+1\right)\left(k_1^2+2\right)-\left(k_1^2-2\right)\left(2k_1^2+1\right)}{4k_1\left(2k_1^2+1\right)-4k_1\left(k_1^2+2\right)}=\frac{-4k_1^4+4}{4k_1\left(k_1^2-1\right)}=\frac{-\left(k_1^2+1\right)}{k_1},$$

所以 $\dfrac{-\left(k_1^2+1\right)}{k_1}=-\dfrac{1}{k_1}$，

因为 $k_1\neq 0$，

所以方程无解，命题得证.

22. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{ax^2}{2},a>0$.

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的极值点个数；

（2）若 $f\left(x\right)$ 有两个极值点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，当 $\mathrm{e}<a<\dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$ 时，证明：$f\left(x_1\right)+2f\left(x_2\right)<\dfrac{3\mathrm{e}}{2}$.

【答案】（1）当 $a\leq \mathrm{e}$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 没有极值点；当 $a>\mathrm{e}$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 有两个极值点.

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的导函数，分析函数的单调性，结合极值的定义求其极值点的个数；

（2）由题意可得 x_1,x_2 是方程 $\mathrm{e}^x-ax=0$ 的两根，先利用作差法结合导函数证明 $x_1+x_2>2$，再证明 $\left(2-x_2\right)\mathrm{e}^{x_2}<x_1\mathrm{e}^{2-x_1}$，则 $f\left(x_1\right)+2f\left(x_2\right)$ 可转化为 $f\left(x_1\right)+2f\left(x_2\right)<\left(1-\dfrac{x_1}{2}\right)\mathrm{e}^{x_1}+x_1\mathrm{e}^{2-x_1}$，再利用导函数求解即可.

【小问 1 详解】

已知 $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{ax^2}{2},a>0$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^x-ax$，

令 $g\left(x\right)=\mathrm{e}^x-ax$，则 $g'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-a$，

当 $x=\ln a$ 时，$g'\left(x\right)=0$，

所以 $g\left(x\right)$ 在 $\left(-\infty,\ln a\right]$ 上单调增减，在 $\left[\ln a,+\infty\right)$ 上单调递增，

则 $g(x)\geq g(\ln a)=a-a\ln a=a(1-\ln a)$，

①当 $0<a\leq\mathrm{e}$ 时，$g(x)\geq0$ 恒成立，故 $f\left(x\right)$ 在 R 上无极值点；

②当 $a>\mathrm{e}$ 时，$g(\ln a)<0$，显然 $\dfrac{1}{a}<1<\ln a,g\left(\dfrac{1}{a}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{a}}-1>0$，

则 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},\ln a\right)$ 上有一个极值点，

又 $g(2\ln a)=a^2-2a\ln a=a(a-2\ln a)$，

令 $h(x)=x-2\ln x(x>\mathrm{e}),h'(x)=1-\dfrac{2}{x}>1-\dfrac{2}{\mathrm{e}}>0$，

故 $h(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增，又 $h\left(\mathrm{e}\right)=\mathrm{e}-2>0$，则 $g(2\ln a)>0$，则 $f\left(x\right)$ 在 $(\ln a,2\ln a)$ 上有一个极值点，

综上，当 $a\leq\mathrm{e}$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 没有极值点；当 $a>\mathrm{e}$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 有两个极值点.

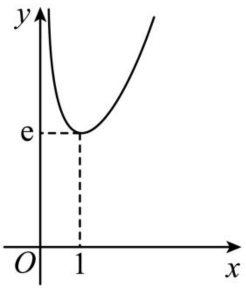
【小问 2 详解】

由（1）中知 $f'(x)=\mathrm{e}^x-ax$，则 x_1,x_2 是方程 $\mathrm{e}^x-ax=0$ 的两根，

不妨令 $F\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$，则 $F'\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^x\left(x-1\right)}{x^2}$，

令 $F'(x)=0$ 解得 $x=1$，

所以 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，大致图像如图所示，



由图像可知当 $a\in\left(\mathrm{e},\frac{\mathrm{e}^2}{2}\right)$ 时，$0<x_1<1$，$1<x_2<2$，

下先证 $x_1+x_2>2$（*）

由 $\begin{cases}\mathrm{e}^{x_1}=ax_1\\ \mathrm{e}^{x_2}=ax_2\end{cases}$，两边取对数得 $\begin{cases}x_1=\ln a+\ln x_1\\ x_2=\ln a+\ln x_2\end{cases}$，作差得 $x_1-x_2=\ln x_1-\ln x_2$，

（*）等价于证明 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=1>\frac{2}{x_1+x_2}\Leftrightarrow \ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2}-1\right)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$，

令 $\frac{x_1}{x_2}=t(t\in(0,1)),\varphi(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1},t\in(0,1)$，

$\varphi'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t+1)^2-4t}{t(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}\geq 0$，

故 $\varphi(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，从而 $\varphi(t)<\varphi(1)=0$，即证得 $x_1+x_2>2$，

所以 $f(x_1)+2f(x_2)=\mathrm{e}^{x_1}-\frac{ax_1^2}{2}+2\mathrm{e}^{x_2}-ax_2^2=\mathrm{e}^{x_1}-\frac{x_1\mathrm{e}^{x_1}}{2}+2\mathrm{e}^{x_2}-x_2\mathrm{e}^{x_2}=\left(1-\frac{x_1}{2}\right)\mathrm{e}^{x_1}+(2-x_2)\mathrm{e}^{x_2}$，

再证明 $(2-x_2)\mathrm{e}^{x_2}<x_1\mathrm{e}^{2-x_1}$，

令 $S(x)=(2-x)\mathrm{e}^x,x\in(1,2),S'(x)=(1-x)\mathrm{e}^x<0$，

故 $S(x)$ 在 $(1,2)$ 上单调递减，则 $S(x_2)<S(2-x_1)$，

所以 $f(x_1)+2f(x_2)<\left(1-\frac{x_1}{2}\right)\mathrm{e}^{x_1}+x_1\mathrm{e}^{2-x_1}$，

再令 $M(x)=\left(1-\frac{x}{2}\right)e^{x}+xe^{2-x}, x\in(0,1)$，

$$M'(x)=\frac{1}{2}(1-x)e^{x}+(1-x)e^{2-x}=(1-x)\left(\frac{1}{2}e^{x}+e^{2-x}\right)>0$$

则 $M(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

故 $M(x)<M(1)=\frac{e}{2}+e=\frac{3e}{2}$，

即证得 $f(x_1)+2f(x_2)<\frac{3e}{2}$.

【点睛】判断函数极值点的个数问题，既是判断其导数有无变号零点的问题，解答时要注意判断导数的正负时，要进行分类讨论，并能结合零点存在定理，判断导函数的零点个数，从而判断函数的极值点问题；本题第 2 问的关键点在于借助 x_1,x_2 是方程 $e^{x}-ax=0$ 的两根得到 $x_1+x_2>2$，将 $f(x_1)+2f(x_2)=e^{x_1}-\frac{ax_1^2}{2}+2e^{x_2}-ax_2^2$ 转化为 $f(x_1)+2f(x_2)<\left(1-\frac{x_1}{2}\right)e^{x_1}+x_1e^{2-x_1}$，再利用导函数求解即可