绝密★启用前

2021-2022学年度高二下学期4月期中质检预测卷
数学试卷

考试时间：120分钟；

注意事项：

1．答题前填写好自己的姓名、班级、考号等信息

2．请将答案正确填写在答题卡上

第I卷（选择题）

请点击修改第I卷的文字说明

评卷人	得分

一、选择题（本题共12道小题，每小题5分，共60分）

1.

在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_5=10$，$a_3+a_6=14$，则$a_5+a_8=$（　）

A. 12　　B. 22　　C. 24　　D. 34

答案及解析：

1.B

【分析】

利用等差数列的性质即可求解.

【详解】设数列$\left\{a_n\right\}$的公差为d，

则$d=\dfrac{a_3+a_6-\left(a_2+a_5\right)}{2}=\dfrac{14-10}{2}=2$,

故$a_5+a_8=a_5+a_2+6d=10+6\times 2=22$.

故选：B

2.记等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_5=10$，$S_{10}=50$，则$S_{15}=$（　）

A. 180　　B. 160　　C. 210　　D. 250

答案及解析：

2.C

【详解】因为$\left\{a_n\right\}$为等比数列，所以S_5，$S_{10}-S_5$，$S_{15}-S_{10}$构成等比数列.

所以$\left(50-10\right)^2=10\left(S_{15}-50\right)$，解得$S_{15}=210$.

故选：C

3.设双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ($a>0$，$b>0$)的虚轴长为2，焦距为$2\sqrt{3}$，则双曲线的渐近线方程为(　　)

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　B. $y=\pm 2x$

C. $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$　　D. $y=\pm\dfrac{1}{2}x$

答案及解析：

3.C

由题意知 2b=2,2c=2$\sqrt{3}$，

∴b=1,c=$\sqrt{3}$,$a^2=c^2-b^2=2$,a=$\sqrt{2}$，

∴渐近线方程为 y=±$\frac{b}{a}$x=±$\frac{1}{\sqrt{2}}$x=±$\frac{\sqrt{2}}{2}$x.故选 C.

4.已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 是奇函数，且满足 $f(\frac{3}{2}-x)=f(x),f(-1)=3$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，且 $\frac{S_n}{n}=\frac{2a_n}{n}-1$，($S_n$ 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$n\in N^*$)，则 $f(a_5)+f(a_6)=$（　）

A. 1　　B. 3　　C. -3　　D. 0

答案及解析：

4.C

【详解】依题意定义在 R 上的函数 $f(x)$ 是奇函数，且满足 $f(\frac{3}{2}-x)=f(x)$，

所以 $f(x+3)=f\left(\frac{3}{2}-\left(-x-\frac{3}{2}\right)\right)=f\left(-x-\frac{3}{2}\right)=-f\left(x+\frac{3}{2}\right)$

$=-f\left(\frac{3}{2}-(-x)\right)=-f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 3 的周期函数.

由 $\frac{S_n}{n}=\frac{2a_n}{n}-1$ 得 $S_n=2a_n-n$ ①,

当 $n=1$ 时，$a_1=1$，

当 $n\geq 2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}-(n-1)$ ②,

①-②得 $a_n=2a_n-2a_{n-1}-1,a_n=2a_{n-1}+1$（$n\geq 2$），

所以 $a_2=2a_1+1=3,a_3=2a_2+1=7,a_4=2a_3+1=15,a_5=2a_4+1=31$，$a_6=2a_5+1=63$.

所以

$f(a_5)+f(a_6)=$

$f(31)+f(63)=f(3\times 10+1)+f(3\times 21)=f(1)+f(0)=-f(-1)=-3$

故选：C

5.已知随机变量 X 的分布列是

X	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	a

则 $E(2X+a)=$

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{7}{3}$　　C. $\frac{7}{2}$　　D. $\frac{23}{6}$

答案及解析：

5.C

6.已知椭圆 C 的焦点为 $F_1\left(-1,0\right)$，$F_2\left(1,0\right)$．过点 F_1 的直线与 C 交于 A、B 两点．若 ΔABF_2 的周长为 8，则椭圆 C 的标准方程为（　）

A. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{15}=1$　　B. $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{7}=1$

C. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$　　D. $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$

答案及解析：

6.C

【分析】

根据焦点坐标，得到 $c=1$；根据椭圆定义，由题中条件求出 $a=2$，得出 b^2，进而可求出结果.

【详解】因为椭圆 C 的焦点为 $F_1\left(-1,0\right)$，$F_2\left(1,0\right)$，所以 $c=1$；

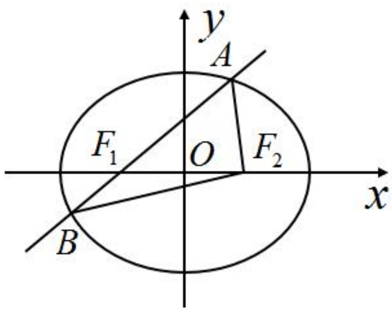
又过点 F_1 的直线与 C 交于 A，B 两点，$\triangle ABF_2$ 的周长为 8，

则根据椭圆定义可得，$\left|AF_1\right|+\left|BF_1\right|+\left|AB\right|=\left|AF_1\right|+\left|BF_1\right|+\left|AF_2\right|+\left|BF_2\right|=4a=8$，

解得 $a=2$，

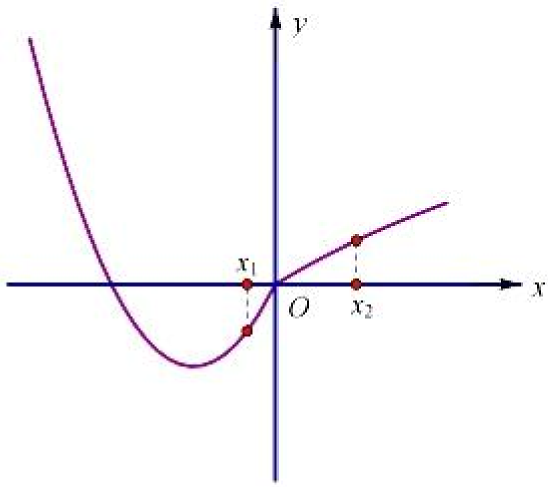
因此 $b^2=a^2-c^2=3$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.



故选：C.

7.已知函数 f（x）的图象如图所示，f'（x）为 f（x）的导函数，根据图象判断下列叙述正确的是（　　）



A．f'（x_1）＜f'（x_2）　　B．f'（x_1）＞f'（x_2）

C．f（x_1）＜f'（x_2）＜0　　　　D．f（x_1）＞f'（x_2）＞0

答案及解析：

7.B

解：由 f（x）的图象可知，在曲线上横坐标为 x_1 处的切线的斜率大于曲线上横坐标为 x_2 处的切线的斜率，

即 f'（x_1）＞f'（x_2）＞0，故 B 正确，A 错误，C 错误；

又 f（x_1）＜0，故 D 错误；

故选：B．

8. $f\left(x\right)$为定义在 R 上的可导函数，且 $f^{'}\left(x\right)>f\left(x\right)$，对任意正实数 a，下列式子成立的是（　）

A. $f\left(a\right)>e^{a}f\left(0\right)$ B. $f\left(a\right)<e^{a}f\left(0\right)$　C. $f\left(a\right)>\dfrac{f\left(0\right)}{e^{a}}$　D. $f\left(a\right)<\dfrac{f\left(0\right)}{e^{a}}$

答案及解析：

8.A

9.（多选题）已知方程 $\dfrac{x^2}{3-k}-\dfrac{y^2}{k-5}=1(k\in Z)$ 表示双曲线，则此时

A.双曲线的离心率为 $\sqrt{2}$　　　　B.双曲线的渐近线方程为 $x\pm y=0$

C.双曲线的一个焦点坐标为($\sqrt{2}$，0)　D.双曲线的焦点到渐近线的距离为 1

答案及解析：

9.ABD

10.（多选题）有 3 台车床加工同一型号的零件. 第 1 台加工的次品率为 6%，第 2，3 台加工的次品率均为 5%，加工出来的零件混放在一起.已知第 1，2，3 台车床的零件数分别占总数的 25%，30%，45%，则下列选项正确的有

A．任取一个零件是第 1 台生产出来的次品概率为 0. 06

B．任取一个零件是次品的概率为 0. 0525

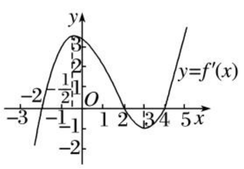
C．如果取到的零件是次品，且是第 2 台车床加工的概率为 $\dfrac{3}{7}$

D．如果取到的零件是次品，且是第 3 台车床加工的概率为 $\dfrac{3}{7}$

答案及解析：

10.BD

11.（多选题）已知函数 $y=f\left(x\right)$ 的导函数 $f'\left(x\right)$ 的图象如图所示，则下列判断正确的是（　）



A. 函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-3,-\dfrac{1}{2}\right)$ 内单调递增

B. 当 $x=-2$ 时，函数 $y=f\left(x\right)$ 取得极小值

C. 函数 $y=f\left(x\right)$ 在区间 $\left(-2,2\right)$ 内单调递增

D. 当 $x=3$ 时，函数 $y=f\left(x\right)$ 有极小值

答案及解析：

11.BC

【分析】

利用 $f'(x)>0$ 的区间是增区间，使 $f'(x)<0$ 的区间是减区间，导数等于零的值是极值，先增后减是极大值，先减后增是极小值分别对选项进行逐一判定.

【详解】对于 A，函数 $y=f(x)$ 在区间 $\left(-3,-\frac{1}{2}\right)$ 内有增有减，故 A 不正确；

对于 B，当 $x=-2$ 时，函数 $y=f(x)$ 取得极小值，故 B 正确；

对于 C，当 $x\in(-2,2)$ 时，恒有 $f'(x)>0$，则函数 $y=f(x)$ 在区间 $(-2,2)$ 上单调递增，故 C 正确；

对于 D，当 $x=3$ 时，$f'(x)\neq 0$，故 D 不正确.

故选：BC

12.（多选题）下列结论正确的是（　　）

A．若 $C_{10}^{m}=C_{10}^{3m-2}$，则 m＝3

B．若 $A_{n+1}^{2}-A_{n}^{2}=12$，则 n＝6

C．在（$1+x$）^{2}+（$1+x$）^{3}+（$1+x$）^{4}+…+（$1+x$）^{11} 的展开式中，含 x^2 的项的系数是 220

D．（$x-1$）^{8} 的展开式中，第 4 项和第 5 项的二项式系数最大

答案及解析：

12.*BC*

解：若 $C_{10}^{m}=C_{10}^{3m-2}$，则 m＝$3m-2$ 或 $m+3m-2$＝10，解得 m＝1 或 m＝3，故 *A* 错误；

若 $A_{n+1}^{2}-A_{n}^{2}=12$，则（$n+1$）$n-n$（$n-1$）＝12，求得 n＝6，故 *B* 正确；

在（$1+x$）^{2}+（$1+x$）^{3}+（$1+x$）^{4}+…+（$1+x$）^{11} 的展开式中，

含 x^2 的项的系数是 $C_{2}^{2}+C_{3}^{2}+C_{4}^{2}+\cdots+C_{11}^{2}$＝220，故 *C* 正确；

（$x-1$）^{8} 的展开式中，第 4 项的二项式系数为 C_{8}^{3}，第 5 项的二项式系数 C_{8}^{4}，

故只有第 5 项的二项式系数最大，故 *D* 错误，

故选：*BC*．

第II卷（非选择题）

请点击修改第II卷的文字说明

评卷人	得分

二、填空题（本题共4道小题，每小题0分，共0分）

13.（x+1）（x﹣1）^{6}展开式中x^3项的系数为_____.

答案及解析：

13.﹣5

解：由题意可得展开式中含x^3项为$x\cdot C_6^4x^2\cdot(-1)^4+1\cdot C_6^3x^3\cdot(-1)^3$=（15﹣20）$x^3$=﹣$5x^3$，

故答案为：﹣5.

14.意大利画家达•芬奇在绘制《抱银貂的女子》（如图）时曾仔细思索女子脖子上的黑色项链的形状是什么曲线？这就是著名的“悬链线问题”．后人研究发现悬链线方程与双曲余弦曲线密切关联，双曲余弦曲线C的解析式为$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$(e（$e$为自然对数的底数）．若直线$y$=$m$与双曲余弦曲线$C$交于点$A$，$B$，曲线$C$在$A$，$B$两点处的切线相交于点$P$，且△$APB$为等边三角形，则$m$=_____，|$AB$|=_____.

答案及解析：

14. 2；$2\ln$（$\sqrt{3}$+2）

解：令g（x）=$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，

g（﹣x）=$\dfrac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}$=$\dfrac{e^{-x}+e^x}{2}$，

所以g（x）=g（﹣x），

所以g（x）为偶函数，即g（x）关于y轴对称，

所以A，B两点关于y轴对称，则设B（x_0，m），A（﹣x_0，m），且m=$\dfrac{e^{x_0}+e^{-x_0}}{2}$，

又△APB为等边三角形，

所以点P在y轴上，且

又g'（x）=$\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，

k_{PB}=$\dfrac{e^{x_0}-e^{-x_0}}{2}$，

所以切线PB的方程为y﹣m=$\dfrac{e^{x_0}-e^{-x_0}}{2}$（$x$﹣$x_0$），

令x=0时，y=$\dfrac{e^{x_0}-e^{-x_0}}{2}$（﹣$x_0$）+$m$，

所以点 P 到直线 AB 的距离 $d=PC=m-[\frac{e^{x_0}-e^{-x_0}}{2}(-x_0)+m]=\frac{e^{x_0}-e^{-x_0}}{2}x_0$，

所以 $\tan\angle BPC=\tan30°=\frac{BC}{CP}=\frac{x_0}{\frac{e^{x_0}-e^{-x_0}}{2}x_0}=\frac{2}{e^{x_0}-e^{-x_0}}$，

所以 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{e^{x_0}-e^{-x_0}}$，

令 $t=e^{x_0}$（$t>0$），则 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{t-\frac{1}{t}}$，

所以 $\sqrt{3}t^2-6t-\sqrt{3}=0$，

所以 $t=\frac{6\pm\sqrt{36-4\times\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}\pm2$，

所以 $t=\sqrt{3}+2$，

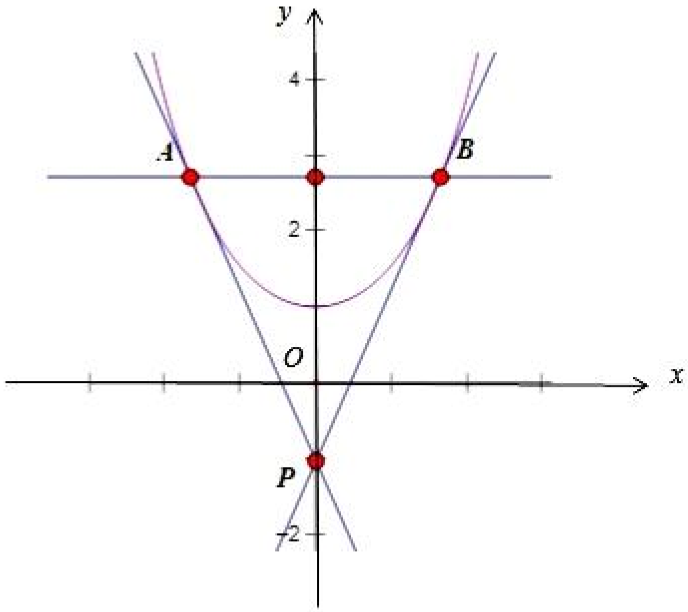
所以 $m=\frac{e^{x_0}+e^{-x_0}}{2}=\frac{t+\frac{1}{t}}{2}=\frac{(\sqrt{3}+2)+\frac{1}{\sqrt{3}+2}}{2}=2$，

所以 $e^{x_0}=\sqrt{3}+2$，

所以 $x_0=ln(\sqrt{3}+2)$，

所以 $|AB|=2x_0=2ln(\sqrt{3}+2)$，

故答案为：2；$2ln(\sqrt{3}+2)$．



15.已知椭圆 C 的中心为坐标原点，焦点在 y 轴上，F_1，F_2 为 C 的两个焦点，C 的短轴长为 4，且 C 上存在一点 P，使得 $|PF_1|=6|PF_2|$，写出 C 的一个标准方程：__▲__.

答案及解析：

15.$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$（答案不唯一，只要形如 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{a^2}=1$，且 $a^2\quad\frac{49}{6}$ 即可）

因为$\left|PF_1\right|=6\left|PF_2\right|$，所以$\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right|=7\left|PF_2\right|=2a$，则$\left|PF_2\right|=\dfrac{2a}{7}$.

又因为$a-c\le\left|PF_2\right|\le a+c$，所以$\dfrac{2a}{7}\ge a-c$，即$\dfrac{c}{a}\ge\dfrac{5}{7}$.

根据题意可设C的方程为$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$，

则$2b=4$，$b=2$，由$\dfrac{c}{a}\ge\dfrac{5}{7}$，得$\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\dfrac{4}{a^2}}\ge\dfrac{5}{7}$，解得$a^2\ge\dfrac{49}{6}$.

16.已知函数$f(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$，$g(x)=(x-1)e^x-\dfrac{1}{2}ax^2$，$a\in\mathrm{R}$.对于任意$x_1,x_2\in(1,+\infty)$，且$x_1\ne x_2$，必有$\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)}>0$，则$a$的取值范围是__________.

答案及解析：

16.$(-\infty,e]$

【分析】

先利用导数判断出$f\left(x\right)$在$(1,+\infty)$内单调递增，进而可得$g(x)$在$(1,+\infty)$内单调递增，转化为$g'(x)=xe^x-ax=x\left(e^x-a\right)\ge0$在$(1,+\infty)$恒成立，分析不等式求最值即可得解.

【详解】$f\left(x\right)$定义域为$(0,+\infty)$.$f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}\ge0$.故$f\left(x\right)$在$(1,+\infty)$内单调递增.

对于任意$x_1,x_2\in(1,+\infty)$，不妨设$x_1<x_2$，

则$f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)<0$.故$g\left(x_1\right)-g\left(x_2\right)<0$，$g\left(x_1\right)<g\left(x_2\right)$，$g(x)$在$(1,+\infty)$内单调递增.

故$g'(x)=xe^x-ax=x\left(e^x-a\right)\ge0$在$(1,+\infty)$恒成立，即$a\le e^x$恒成立，可知$a\le e$.

$\therefore a$的取值范围为$(-\infty,e]$.

故答案为：$(-\infty,e]$.

评卷人	得分

三、解答题（本题共6道小题,第1题0分,第2题0分,第3题0分,第4题0分,第5题0分,第6题0分,共0分）

17.在平面直角坐标系xOy中，已知点A（1，2），B是一动点，直线OA，OB，AB的斜率分别为k_1，k_2，k_3，且$\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\dfrac{1}{k_3}$，记$B$点的轨迹为$E$.

（1）求E的方程；

（2）过C（1，0）的直线与E交于M，N两点，过线段MN的中点D且垂直于MN的直线与x轴交于H点，若$|MN|=4|DH|$，求直线MN的方程.

答案及解析：

17.解：（1）设B（x，y），

所以$k_1=\dfrac{2}{1}$，$k_2=\dfrac{y}{x}$，$k_3=\dfrac{y-2}{x-1}$，

因为$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{k_3}$，

所以$\frac{1}{2}+\frac{x}{y}=\frac{x-1}{y-2}$，

化简得 $y^2=4x$.

所以曲线 E 的方程为 $y^2=4x$（$x\neq0$，$x\neq1$）.

（2）设直线 MN 的方程为 $x=ty+1$，

联立$\begin{cases}x=ty+1\\y^2=4x\end{cases}$，得 $y^2-4ty-4=0$，

所以$\triangle=16t^2-4\times1\times(-4)=16(t^2+1)>0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

所以 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$，

所以$|MN|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4(t^2+1)$，

由 D 为 MN 的中点，

所以 $D(2t^2+1,2t)$，

所以直线 DH 的方程为 $y-2t=-t(x-2t^2-1)$，

所以 H 点的坐标为$(2t^2+3,0)$，

所以$|DH|=2\sqrt{t^2+1}$，

因为$|MN|=2|DH|$，

所以 $4(t^2+1)=8\sqrt{t^2+1}$，

解得 $t=\pm\sqrt{3}$，

所以直线 MN 的方程为 $x-\sqrt{3}y-1=0$ 或 $x+\sqrt{3}y-1=0$.

18.已知函数 $f(x)=x^4\ln x-a\left(x^4-1\right),a\in R$.

（I）求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程；

（II）若当 $x\geq1$ 时，$f\left(x\right)\geq0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围；

（III）$f(x)$的极小值为$\varphi(a)$，当 $a>0$ 时，求证：$\frac{1}{4}\left(e^{1-\frac{1}{4a}}-e^{4a-1}\right)\leq\varphi(a)\leq0$.（$e=2.71828\cdots$为自然对数的底）

答案及解析：

18.（I）$y=(1-4a)(x-1)$（II）$a\leq\frac{1}{4}$（III）证明见解析

分析：（I）利用导数的几何意义可求得结果；

（II）求导后，分$1-4a\geq0$和$1-4a<0$讨论可求得结果；

（III）利用导数求出$\varphi(a)$，再利用导数可证$\frac{1}{4}\left(e^{1-\frac{1}{4a}}-e^{4a-1}\right)\leq\varphi(a)\leq0$成立.

解答：（I）$f'(x)=4x^3\ln x+x^4\cdot\dfrac{1}{x}-4ax^3=(4\ln x+1-4a)x^3$，

$f'(1)=1-4a$，$f(1)=0$，

所以曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=(1-4a)(x-1)$.

（II）由（I）知 $f'(x)=(4\ln x+1-4a)x^3$，

当 $1-4a\geq 0$，即 $a\leq\dfrac{1}{4}$ 时，因为 $x\geq 1$，所以 $4\ln x\geq 0$，所以 $(4\ln x+1-4a)x^3\geq 0$，即 $f'(x)\geq 0$，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为增函数，所以 $f(x)\geq f(1)=0$，

当 $1-4a<0$，即 $a>\dfrac{1}{4}$ 时，因为 $x\geq 1$，令 $f'(x)<0$，得 $4\ln x+1-4a<0$，得 $1\leq x<e^{a-\frac{1}{4}}$，

所以 $f(x)$ 在 $[1,e^{a-\frac{1}{4}})$ 上递减，

所以当 $x\in(1,e^{a-\frac{1}{4}})$ 时，$f(x)<f(1)=0$，不合题意，

综上所述：实数 a 的取值范围是 $a\leq\dfrac{1}{4}$.

（III）令 $f'(x)=(4\ln x+1-4a)x^3=0$，得 $\ln x=a-\dfrac{1}{4}$，得 $x=e^{a-\frac{1}{4}}$，

当 $0<x<e^{a-\frac{1}{4}}$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>e^{a-\frac{1}{4}}$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,e^{a-\frac{1}{4}})$ 上递减，在 $(e^{a-\frac{1}{4}},+\infty)$ 上递增，

所以 $f(x)$ 的极小值为 $\varphi(a)=f(e^{a-\frac{1}{4}})=e^{4a-1}\cdot(a-\dfrac{1}{4})-a(e^{4a-1}-1)=a-\dfrac{1}{4}e^{4a-1}$，

$\varphi'(a)=1-\dfrac{1}{4}\times 4e^{4a-1}=1-e^{4a-1}$，

当 $0<a<\dfrac{1}{4}$ 时，$\varphi'(a)>0$，当 $a>\dfrac{1}{4}$ 时，$\varphi'(a)<0$，

所以 $\varphi(a)$ 在 $(0,\dfrac{1}{4})$ 上递增，在 $(\dfrac{1}{4},+\infty)$ 上递减，

所以 $\varphi(a)\leq\varphi(\dfrac{1}{4})=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}e^{4\times\frac{1}{4}-1}=0$，

当 $a>0$ 时，要证 $\dfrac{1}{4}\left(e^{1-\frac{1}{4a}}-e^{4a-1}\right)\leq\varphi(a)$，转化为证 $\dfrac{1}{4}e^{1-\frac{1}{4a}}-\dfrac{1}{4}e^{4a-1}\leq a-\dfrac{1}{4}e^{4a-1}$，

转化为证 $4a\geq e^{1-\frac{1}{4a}}$，转化为证 $\ln(4a)\geq 1-\dfrac{1}{4a}$，转化为证 $\ln(4a)+\dfrac{1}{4a}-1\geq 0$，

令 $g(a)=\ln(4a)+\dfrac{1}{4a}-1$，

则 $g'(a)=\dfrac{1}{4a}\cdot 4-\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{4a-1}{4a^2}$，

当$0<a<\dfrac{1}{4}$时，$g'(a)<0$，$g(a)$为减函数，

当$a>\dfrac{1}{4}$时，$g'(a)>0$，$g(a)$为增函数，

所以$g(a)\geq g(\dfrac{1}{4})=\ln 1+1-1=0$，即$\ln(4a)+\dfrac{1}{4a}-1\geq 0$，所以$\dfrac{1}{4}\left(e^{1-\frac{1}{4a}}-e^{4a-1}\right)\leq\varphi(a)$，

所以$\dfrac{1}{4}\left(e^{1-\frac{1}{4a}}-e^{4a-1}\right)\leq\varphi(a)\leq 0$.

19.甲、乙两人按如下规则进行射击比赛，双方对同一目标轮流射击，若一方未击中，另一方可继续射击，甲先射，直到有人击中目标或两人总射击次数达4次为止.若甲击中目标的概率为$\dfrac{2}{3}$，乙击中目标的概率为$\dfrac{1}{2}$.

（1）求甲在他第二次射击时击中目标的概率；

（2）求比赛停止时，甲、乙两人射击总次数X的分布列和期望.

答案及解析：

19.（1）$\dfrac{1}{9}$；（2）分布列见解析，$E\left(X\right)=\dfrac{14}{9}$.

【分析】

（1）根据甲在第二次射击时击中目标，说明甲第一次未击中目标，乙第一次也未击中目标，由此利用概率的乘法公式计算出目标事件的概率；

（2）先分析X的可能取值，然后求解出X的可能取值对应的概率，由此得到X的分布列并计算出期望值.

【详解】记甲在第i$\left(i=1,2\right)$次射击击中目标为事件A_i，乙在第i$\left(i=1,2\right)$次射击击中目标为事件B_i，（1）记“甲在他第二次射击时击中目标”为事件M，

所以$P\left(M\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{B_1}\right)P\left(A_2\right)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}$；

（2）由题意可知：X可取$1,2,3,4$，

$P\left(X=1\right)=P\left(A_1\right)=\dfrac{2}{3}$，$P\left(X=2\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(B_1\right)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$，

$P\left(X=3\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{B_1}\right)P\left(A_2\right)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{9}$，

$P\left(X=4\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{B_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{18}$，

所以X的分布列如下：

X	1	2	3	4
P	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{9}$	$\dfrac{1}{18}$

所以$E\left(X\right)=1\times\dfrac{2}{3}+2\times\dfrac{1}{6}+3\times\dfrac{1}{9}+4\times\dfrac{1}{18}=\dfrac{14}{9}$.

20.已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_3=3a_1-2$，且 $S_5-S_3=4a_2$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{\frac{1}{S_n}\}$的前 n 项和 T_n.

答案及解析：

20.解：（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

因为 $a_3=3a_1-2$，且 $S_5-S_3=4a_2$.

所以$\begin{cases}a_1+2d=3a_1-2\\2a_1+7d=4a_1+4d\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=3\\d=2\end{cases}$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式 $a_n=3+2(n-1)=2n+1$.

（2）$S_n=3n+\frac{n(n-1)}{2}\times2=n(n+2)$，

所以$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$，

所以 $T_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})$

$=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$

$=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

21.已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}+1=\frac{a_n+1}{a_n+2}$，$a_n\neq-1$且 $a_1=1$.

（1）求证：数列$\{\frac{1}{a_n+1}\}$是等差数列，并求出数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令 $b_n=\frac{1}{a_n+1}$，求数列$\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\}$的前 n 项和 S_n.

答案及解析：

21.（1）详见解析（2）$S_n=\frac{4n}{2n+1}$

分析：（1）根据数列的递推公式可得 $\frac{1}{a_{n+1}+1}-\frac{1}{a_n+1}=1$，即可证明数列$\left\{\frac{1}{a_n+1}\right\}$是等差数列，再求出通项公式即可；

（2）先求得 $b_n=\frac{2n-1}{2}$，则 S_n 利用裂项相消法即可求出.

解答：（1）$a_{n+1}+1=\frac{a_n+1}{a_n+2}$，$a_n\neq-1$且 $a_1=1$，

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}+1}=\frac{a_n+2}{a_n+1}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}+1}=\frac{(a_n+1)+1}{a_n+1}$，

$\therefore \frac{1}{a_{n+1}+1}-\frac{1}{a_n+1}=1$，

数列$\left\{\frac{1}{a_n+1}\right\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公差为 1 的等差数列.

$\therefore \frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot 1$，

$\therefore \frac{1}{a_n+1}=\frac{2n-1}{2}$，

$\therefore a_n=\frac{3-2n}{2n-1}$.

（2）由（1）知$b_n=\frac{2n-1}{2}$，

$\therefore \frac{1}{b_n b_{n+1}}=\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=2\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

$\therefore S_n=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{4n}{2n+1}$.

22.已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$，且$F_1(-1,0)$，椭圆经过点$\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

（1）求椭圆的方程；

（2）直线l过椭圆右顶点 B，交椭圆于另一点 A，点 G 在直线l上，且$\angle GOB=\angle GBO$.若$GF_1\perp AF_2$，求直线l的斜率.

答案及解析：

22.（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；（2）$\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

分析：

（1）利用椭圆的定义可求得a的值，利用$b=\sqrt{a^2-c^2}$可求得b的值，进而可求得椭圆的方程；

（2）设直线l的方程为$x=ty+2(t\neq 0)$，将该直线的方程与椭圆的方程联立，求出点 A 的坐标，由题中条件求出点G的坐标，由$GF_1\perp AF_2$得出$\overrightarrow{F_1G}\cdot\overrightarrow{F_2A}=0$，据此计算出实数$t$的值，进而可求得直线$l$的斜率.

解答：（1）易知点$F_2(1,0)$，由椭圆的定义得$2a=|PF_1|+|PF_2|=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{0^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=4$，

$\therefore a=2$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，

因此，椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）由题意可知，直线l的斜率存在，且斜率不为零，

设直线l的方程为$x=ty+2(t\neq 0)$，设点$A(x_0,y_0)$，

联立$\begin{cases}x=ty+2\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$，消去$x$得$\left(3t^2+4\right)y^2+12ty=0$，则$y_0=-\dfrac{12t}{3t^2+4}$，$x_0=\dfrac{8-6t^2}{3t^2+4}$，

所以，点A的坐标为$\left(\dfrac{8-6t^2}{3t^2+4},-\dfrac{12t}{3t^2+4}\right)$，

$\angle GOB=\angle GBO$，则$x_G=1$，可得$y_G=-\dfrac{1}{t}$，所以，点G的坐标为$\left(1,-\dfrac{1}{t}\right)$，

$\because GF_1\perp AF_2$，则$\overrightarrow{F_1G}\cdot\overrightarrow{F_2A}=0$，

$\because \overrightarrow{F_1G}=\left(2,-\dfrac{1}{t}\right)$，$\overrightarrow{F_2A}=\left(\dfrac{4-9t^2}{3t^2+4},-\dfrac{12t}{3t^2+4}\right)$，

所以，$\overrightarrow{F_1G}\cdot\overrightarrow{F_2A}=\dfrac{20-18t^2}{3t^2+4}=0$，解得$t=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{3}$，

因此，直线l的斜率为$\dfrac{1}{t}=\pm\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$