

# 2020年福建省福州一中高考数学模拟试卷（理科）（6月份）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。（其中第4、5、9题包含解题视频，可扫描页眉二维码，点击对应试题进行查看）

1. (5分) 已知集合  $A = \{x | x < a\}$ ， $B = \{x | 1 < x < 2\}$ ，且  $A \cup (\complement_R B) = R$ ，则实数  $a$  的取值范围是( )

A.  $a \leq 1$       B.  $a < 1$       C.  $a \geq 2$       D.  $a > 2$

2. (5分) 复数  $z = \left| \frac{\sqrt{3}-i}{i} \right| - i$  ( $i$  为虚数单位)，则复数  $z$  的共轭复数为( )

A.  $2-i$       B.  $2+i$       C.  $4-i$       D.  $4+i$

3. (5分)  $\int_{-1}^1 (3x^2 - \sin x) dx$  等于( )

A. 0      B.  $2\sin 1$       C.  $2\cos 1$       D. 2

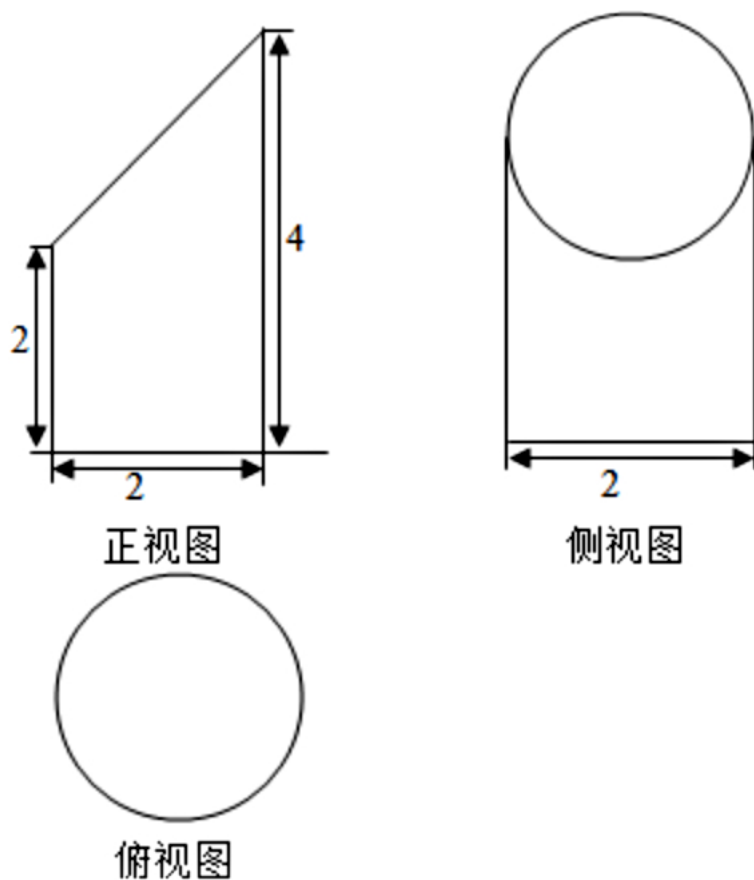
4. (5分) 若函数  $y = f(x)$  的定义域是  $[0, 2]$ ，则函数  $g(x) = \frac{f(2x)}{x-1}$  的定义域是( )

A.  $[0, 1) \cup (1, 2]$       B.  $[0, 1) \cup (1, 4]$       C.  $[0, 1)$       D.  $(1, 4]$

5. (5分) 数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = 2n^2 - 3n$  ( $n \in N^+$ )，若  $p - q = 5$ ，则  $a_p - a_q =$  ( )

A. 10      B. 15      C. -5      D. 20

6. (5分) 已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为( )



- A.  $6\pi$       B.  $\frac{10\pi}{3}$       C.  $3\pi$       D.  $\frac{8\pi}{3}$

7. (5分) 在区间 $[-1, 1]$ 上随机取一个数 $k$ ，使直线 $y=k(x+3)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交的概率为( )

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

8. (5分) 向量 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ， $\vec{a}\perp\vec{b}$ ， $(\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{c}$ ， $M=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}+\frac{|\vec{b}|}{|\vec{c}|}+\frac{|\vec{c}|}{|\vec{a}|}$ ，则 $M=( )$

- A. 3      B.  $3\sqrt{2}$       C.  $2+\frac{\sqrt{2}}{2}$       D.  $1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

9. (5分) 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $3\sqrt{2}$ ， $E$ ， $F$ 分别为 $BC$ ， $CD$ 的中点， $P$ 是线段 $A_1B$ 上的动点， $C_1P$ 与平面 $D_1EF$ 的交点 $Q$ 的轨迹长为( )

- A. 3      B.  $\sqrt{13}$       C. 4      D.  $3\sqrt{2}$

10. (5分) 已知曲线 $y = \frac{x}{e^x}$ 在 $x=x_1$ 处的切线为 $l_1$ ，曲线 $y=\ln x$ 在 $x=x_2$ 处的切线为 $l_2$ ，且 $l_1\perp l_2$ ，则 $x_2-x_1$ 的取值范围是( )

- A.  $(0, \frac{1}{e})$       B.  $(-\infty, -1)$       C.  $(-\infty, 0)$       D.  $(-\infty, \frac{1}{e})$

11. (5分) 某化工厂在定期检修设备时发现生产管道中共有5处阀门(A-E)发生有害气体泄漏．每处阀门在每小时内有害气体的泄漏量大体相等，约为0.01立方米．阀门的修复工作可在不停产的情况下实施．由于各阀门所处的位置不同，因

此修复所需的时间不同，且修复时必须遵从一定的顺序关系，具体情况如表：

泄漏阀门	A	B	C	D	E
修复时间 (小时)	11	8	5	9	6
需先修复 好的阀门	-	C	-	-	B

在只有一个阀门修复设备的情况下，合理安排修复顺序，泄漏的有害气体总量最小为( )

- A. 1.14立方米      B. 1.07立方米      C. 1.04立方米      D. 0.39立方米

12. (5分) 设 $a_i(i=0, 1, 2, \dots, 2020)$ 是常数，对于 $\forall x \in R$ ，都有 $x^{2020} = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-2) + \dots + a_{2020}(x-1)(x-2)\dots(x-2020)$ ，则 $-a_0 + a_1 - a_2 + 2! a_3 - 3! a_4 + 4! a_5 - \dots + 2018! a_{2019} - 2019! a_{2020} = ( )$

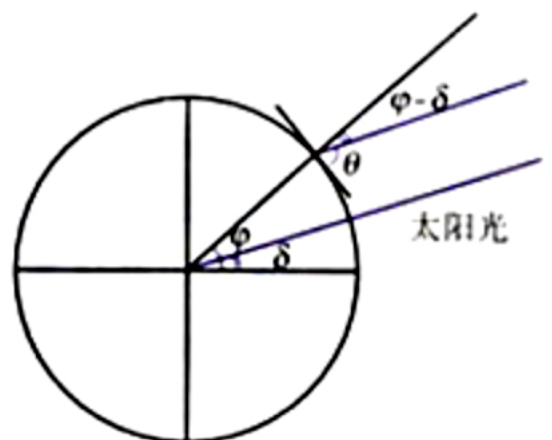
- A. 2019      B. 2020      C. 2019!      D. 2020!

二．填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．请将答案填在答题卡对应题号的位置上．答错位置，书写不清，模棱两可均不得分．(其中第2题包含解题视频，可扫描页眉二维码，点击对应试题进行查看)

1. (5分)  $\cos 15^\circ \cos 45^\circ - \cos 75^\circ \cos 45^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$  .

2. (5分) 寒假里5名同学结伴乘动车外出旅游，实名制购票，每人一座，恰在同一排A, B, C, D, E五个座位(一排共五个座位)，上车后五人在这五个座位上随意坐，则恰有一人坐对与自己车票相符座位的坐法有        种 .

3. (5分) 如图，将地球近似看作球体．设地球表面某地正午太阳高度角为 $\theta$ ， $\delta$ 为此时太阳直射纬度(当地夏半年取正值，冬半年取负值)， $\varphi$ 为该地的纬度值．已知太阳每年直射范围在南北回归线之间，即 $\delta \in [-23^\circ 26', 23^\circ 26']$ ．如果在北京地区(纬度数约为北纬 $40^\circ$ )的一幢高为 $h_0$ 的楼房北面盖一新楼，要使新楼一层正午的太阳全年不被前面的楼房遮挡，两楼的距离不应小于        . (只需列出式子)



4. (5分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点是 $F_1, F_2$ ,  $A, B$ 是 $C$ 上(不在长轴上)的两点, 且 $\overrightarrow{F_1A} \parallel \overrightarrow{F_2B}$ .  $M$ 为 $F_1B$ 与 $F_2A$ 的交点, 则 $M$ 的轨迹所在的曲线是 \_\_\_\_\_ ; 离心率为 \_\_\_\_\_ .

**三. 解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.**

1. (12分) 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = a_n(a_n + 1), b_n = \frac{1}{a_n + 1}$ ,  $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ , 前 $n$ 项积为 $T_n$ .

(1)证明:  $S_n + 2T_n$ 是定值;

(2)试比较 $S_n$ 与 $T_n$ 的大小.

2. (12分) 已知圆 $C: x^2 + (y-1)^2 = r^2 (r > 0)$ , 设 $A$ 为圆 $C$ 与 $y$ 轴负半轴的交点, 过点 $A$ 作圆 $C$ 的弦 $AM$ , 并使弦 $AM$ 的中点恰好落在 $x$ 轴上.

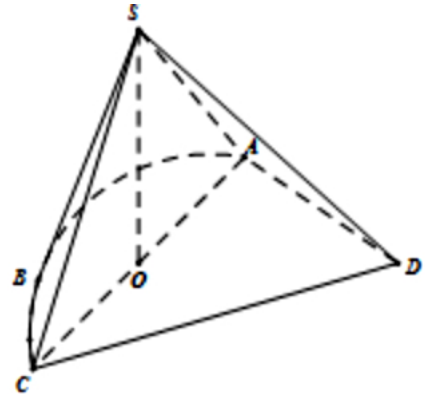
(1)求点 $M$ 的轨迹 $E$ 的方程;

(2)延长 $MO$ 交直线 $y = -1$ 于点 $P$ , 延长 $MC$ 交曲线 $E$ 于点 $N$ , 曲线 $E$ 在点 $N$ 处的切线与 $y$ 轴交于点 $Q$ . 求证:  $MN \parallel QP$ .

3. (12分) 如图，组合体由半个圆锥 $S-O$ 和一个三棱锥 $S-ACD$ 构成，其中 $O$ 是圆锥 $S-O$ 底面圆心， $B$ 是圆弧 $AC$ 上一点，满足 $\angle BOC$ 是锐角， $AC=CD=DA=2$ 。

(1)在平面 $SAB$ 内过点 $B$ 作 $BP \parallel$ 平面 $SCD$ 交 $SA$ 于点 $P$ ，并写出作图步骤，但不要求证明；

(2)在(1)中，若 $P$ 是 $SA$ 中点，且 $SO = \sqrt{3}$ ，求直线 $BP$ 与平面 $SAD$ 所成角的正弦值。



4. (12分) 已知6名某疾病病毒密切接触者中有1名感染病毒，其余5名健康，需要通过化验血液来确定感染者。血液化验结果呈阳性的即为感染者，呈阴性即为健康。

(1)若从这6名密切接触者中随机抽取3名，求抽到感染者的概率；

(2)血液化验确定感染者的方法有：①逐一化验；②分组混合化验：先将血液分成若干组，对组内血液混合化验，若化验结果呈阴性，则该组血液不含病毒；若化验结果呈阳性，则对该组的备份血液逐一化验，直至确定感染者。

(i)采取逐一化验，求所需检验次数 $\xi$ 的数学期望；

(ii)采取平均分组混合化验(每组血液份数相同)，依据所需化验总次数的期望，选择合理的平均分组方案。

5. (12分) 已知函数 $f(x)=e\ln x-ax$ ,  $g(x)=\frac{x^2}{2}-x$ .

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)若存在直线 $y=h(x)$ ,使得对任意的 $x\in(0,+\infty)$ ,  $h(x)\geq f(x)$ ,对任意的 $x\in R$ ,  $g(x)\geq h(x)$ ,求 $a$ 的取值范围.

请考生在第22、23两题中任选一题作答.注意:只能做所选定的题目.如果多做,则按所做第一个题目计分,作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.[选修4-4:坐标系与参数方程](10分)

1. (10分) 在直角坐标系 $xOy$ 中,曲线 $C_1$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{3}t}{2} \\ y=\frac{t}{2} \end{cases}$ , ( $t$ 为参数),以原点 $O$ 为极点, $x$ 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系,曲线 $C_2$ 的极坐标方程为 $\rho^2=\frac{12}{3+\sin^2\theta}$ .

(1)求曲线 $C_1$ 的普通方程和 $C_2$ 的直角坐标方程;

(2) 已知  $F(-1, 0)$ ，曲线  $C_1$  与  $C_2$  的交点为  $A, B$ ，求  $|AF| - |BF|$  的值。

**[选修4-5：不等式选讲] (10分)**

1. 已知  $f(x) = |x-1| + a|x-2|$ 。

(1) 若  $a=2$ ，求  $f(x)$  的最小值；

(2) 若  $f(x) \geq -1$ ，求实数  $a$  的取值范围。

# 2020年福建省福州一中高考数学模拟试卷 (理科) (6月份)

## (答案)

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。  
(其中第4、5、9题包含解题视频，可扫描页眉二维码，点击对应试题进行查看)

1. 解： $\because \complement_R B = \{x | x \leq 1, \text{ 或 } x \geq 2\}$ ，  
 $\therefore$ 若  $A \cup (\complement_R B) = R$ ；  
 $\therefore a \geq 2$ 。  
故选：C。

2. 解：复数  $z = \frac{\sqrt{3}-i}{i} - i = \frac{|\sqrt{3}-i|}{|i|} - i = 2-i$ ，  
 $\therefore$ 复数  $z$  的共轭复数为  $\bar{z} = 2+i$ 。  
故选：B。

3. 解： $\int_{-1}^1 (3x^2 - \sin x) dx = (x^3 + \cos x) \Big|_{-1}^1 = 1 + \cos 1 + 1 - \cos 1 = 2$ ；  
故选：D。

4. 解：根据题意有： $\begin{cases} 0 \leq 2x \leq 2 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}$ ，  
所以  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \neq 1 \end{cases}$ ，  
即  $0 \leq x < 1$ ；  
所以  $g(x)$  的定义域为  $[0, 1)$ 。  
故选：C。

5. 解：当  $n \geq 2$ ， $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 3n - 2(n-1)^2 + 3n - 3 = 4n - 5$   
 $a_1 = S_1 = -1$  适合上式，  
所以  $a_n = 4n - 5$ ，  
所以  $a_p - a_q = 4(p - q)$ ，  
因为  $p - q = 5$ ，  
所以  $a_p - a_q = 20$   
故选：D。

6. 解：由三视图判断几何体是底面半径为1，高为6的圆柱被截掉分开，相等的2部分，  
 $\therefore V = \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 \times 6 = 3\pi$ ，  
故选：C。

7. 解：圆  $x^2 + y^2 = 1$  的圆心为  $(0, 0)$   
圆心到直线  $y = k(x+3)$  的距离为  $\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}$   
要使直线  $y = k(x+3)$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  相交，则  $\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}} < 1$ ，解得  $-\frac{\sqrt{2}}{4} < k < \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。  
 $\therefore$ 在区间  $[-1, 1]$  上随机取一个数  $k$ ，使  $y = k(x+3)$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  相交的概率为  $\frac{\frac{\sqrt{2}}{4} - (-\frac{\sqrt{2}}{4})}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 。  
故选：C。



8. 解：根据条件，作 $\vec{OA} = \vec{a}$ ， $\vec{OB} = \vec{b}$ ， $\vec{OA} \perp \vec{OB}$ ；

以 $OA$ ， $OB$ 为邻边作矩形 $OACB$ ，则 $\vec{OC} = -\vec{c}$ ，如图所示，连接 $OC$ ， $AB$ ，则：

$$\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{a} - \vec{b}；$$

$$\because (\vec{a} - \vec{b}) \perp \vec{c}, \vec{OC} = -\vec{c}；$$

$$\therefore \vec{BA} \perp \vec{OC}；$$

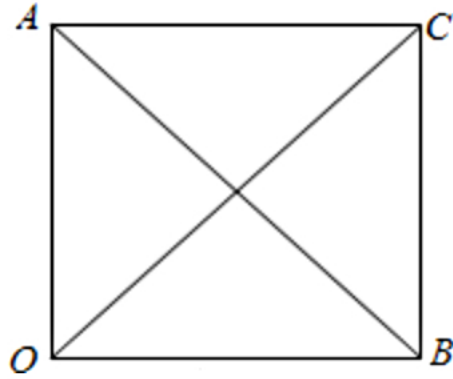
即 $BA \perp OC$ ；

$\therefore$ 矩形 $OACB$ 为正方形，设边长为1，则：

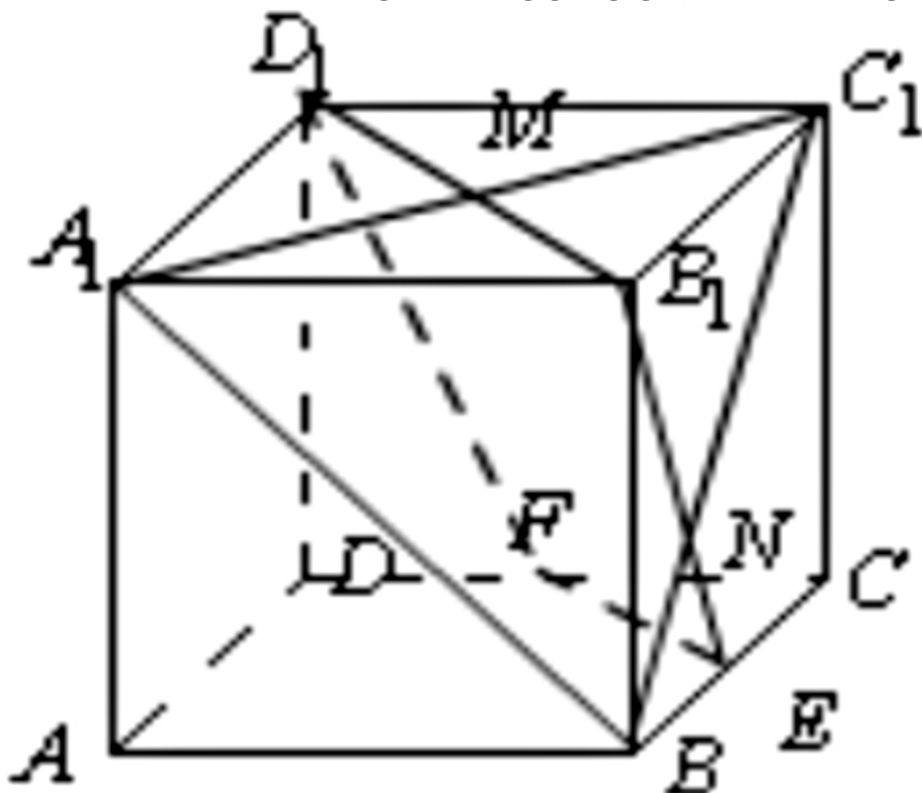
$$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, |\vec{c}| = \sqrt{2}；$$

$$\therefore \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} + \frac{|\vec{b}|}{|\vec{c}|} + \frac{|\vec{c}|}{|\vec{a}|} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} .$$

故选：D .



9. 解：如图所示，连接  $EF$ ， $A_1B$ ，连接  $A_1C_1$ ， $B_1D_1$  交于点  $M$ ，连接  $B_1E$ ， $BC_1$  交于点  $N$ ，



由  $EF \parallel B_1D_1$ ，即  $E, F, B_1, D_1$  共面，由  $P$  是线段  $A_1B$  上的动点，  
当  $P$  重合于  $A_1$  或  $B$  时，

$C_1A_1, C_1B$  与平面  $D_1EF$  的交点分别为  $M, N$ ，即  $Q$  的轨迹为  $MN$ ，

由棱长为  $3\sqrt{2}$ ，则  $C_1M = \frac{1}{2}A_1C_1 = 3$

则  $BC_1=6$ ，又  $\frac{BE}{B_1C_1} = \frac{BN}{NC_1} = \frac{1}{2}$ ，则  $NC_1 = \frac{2}{3}BC_1 = 4$ ，

由  $A_1B=BC_1=A_1C_1$ ，则  $\angle A_1C_1B=60^\circ$ ，

$$\text{则 } MN = \sqrt{MC_1^2 + NC_1^2 - 2 \cdot MC_1 \cdot NC_1 \cdot \cos \angle A_1C_1B} = \sqrt{9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2}} = \sqrt{13},$$

故选：B.

10. 解：由  $y = \frac{x}{e^x}$ ，得  $y' = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$ ，  
 则  $k_{l_1} = \frac{1-x_1}{e^{x_1}}$ ，  
 由  $y = \ln x$ ，得  $y' = \frac{1}{x}$ ，  
 则  $k_{l_2} = \frac{1}{x_2}$ ，  
 $\because l_1 \perp l_2$ ， $\therefore k_{l_1} \cdot k_{l_2} = \frac{1-x_1}{e^{x_1}} \cdot \frac{1}{x_2} = -1$ ，即  $x_2 = \frac{x_1-1}{e^{x_1}}$ 。  
 $\because x_2 > 0$ ， $\therefore x_1 > 1$ ，  
 又  $x_2 - x_1 = \frac{x_1-1}{e^{x_1}} - x_1$ ，令  $h(x) = \frac{x-1}{e^x} - x$ ， $x > 1$ 。  
 则  $h'(x) = \frac{2-x}{e^x} - 1 = \frac{2-x-e^x}{e^x}$ 。  
 当  $x \in (1, +\infty)$  时， $y = 2-x-e^x$  为减函数，故  $2-x-e^x < 2-1-e < 0$ 。  
 $\therefore h'(x) < 0$  在  $(1, +\infty)$  上恒成立，  
 故  $h(x)$  在  $(1, +\infty)$  上为减函数，则  $h(x) < h(1) = -1$ 。  
 又当  $x > 1$  时， $\frac{x-1}{e^x} - x < \frac{x-1}{e} - x = (\frac{1}{e} - 1)x - \frac{1}{e}$ ，  
 $\therefore h(x)$  的取值范围为  $(-\infty, -1)$ 。  
 即  $x_2 - x_1$  的取值范围是  $(-\infty, -1)$ 。  
 故选：B。

11. 解：由表可知，根据需先修复好的阀门的要求，可确定 A, D 的顺序无要求，其他三个阀门的先后顺序必须是 C, B, E，要使泄漏的有害气体总量最小，修复时间长的应尽量靠后，  
 故修复顺序为 C, B, E, D, A，  
 则 C, B, E, D, A 各阀门泄漏有害气体的时间分别为 5, 13, 19, 28, 39 小时，泄漏有害气体的时间共  $5+13+19+28+39=104$  小时，  
 故泄漏的有害气体总量最小为  $104 \times 0.01 = 1.04$  立方米，  
 故选：C。

12. 解：代入  $x=1$ ，得  $a_0=1$ ，  
 $\therefore x^{2020}-1 = a_1(x-1) + a_2(x-1)(x-2) + \dots + a_{2020}(x-1)(x-2)\dots(x-2020)$ ，  
 而  $x^{2020}-1 = (x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{2019})$ ，  
 $\therefore x^{2019} + x^{2018} + \dots + x + 1 = a_1 + a_2(x-2) + \dots + a_{2020}(x-2)\dots(x-2020)$ ，  
 代入  $x=1$  得  $2020 = a_1 - a_2 + 2a_3 - 3! a_4 + 4! a_5 - \dots + 2018! a_{2019} - 2019! a_{2020}$ ，  
 $\therefore -a_0 + a_1 - a_2 + 2! a_3 - 3! a_4 + 4! a_5 - \dots + 2018! a_{2019} - 2019! a_{2020} = 2020 - a_0 = 2020 - 1 = 2019$ ，  
 故选：A。

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。请将答案填在答题卡对应题号的位置上。答错位置，书写不清，模棱两可均不得分。（其中第 2 题包含解题视频，可扫描页眉二维码，点击对应试题进行查看）

1. 解： $\cos 15^\circ \cos 45^\circ - \cos 75^\circ \cos 45^\circ = \cos 15^\circ \cos 45^\circ - \sin 15^\circ \sin 45^\circ = \cos(15^\circ + 45^\circ) = \frac{1}{2}$ ，  
 故答案为： $\frac{1}{2}$ 。

2. 解：设5名同学也用  $A, B, C, D, E$  来表示，

若恰有一人坐对与自己车票相符座位的坐法，设  $E$  同学坐在自己的座位上，则其他四位都不是自己的座位，则有  $BADC, CADB, DABC, BDAC, CDAB, DCAB, BCDA, DCBA, CDBA$  共9种坐法，

则恰有一人坐对与自己车票相符座位的坐法有  $5 \times 9 = 45$  种，

故答案为：45 .

3. 解：设两楼的距离为  $d$ ，

因为  $\theta = 90^\circ - (40^\circ - \delta) = 50^\circ + \delta \in [26^\circ 34', 73^\circ 26']$ ，

则要使新楼一层正午的太阳全年不被前面的楼房遮挡，需满足

$\tan \theta \geq \frac{h_0}{d}$  对  $\theta \in [26^\circ 34', 73^\circ 26']$  恒成立，因此

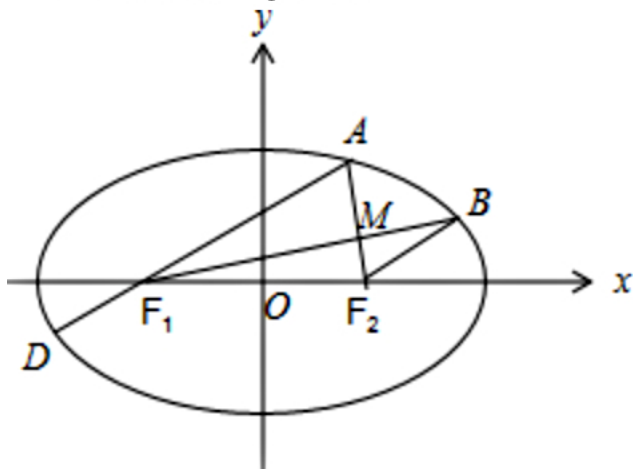
$$(\tan \theta)_{\min} \geq \frac{h_0}{d} ,$$

$$\therefore \tan 26^\circ 34' \geq \frac{h_0}{d} \therefore d \geq \frac{h_0}{\tan 26^\circ 34'} ,$$

从而两楼的距离不应小于  $\frac{h_0}{\tan 26^\circ 34'}$ ，

故答案为： $\frac{h_0}{\tan 26^\circ 34'}$  .

4. 解：如图，延长 $AF_1$ 交椭圆于 $D$ 。



设 $A(x_1, y_1)$ ,  $D(x_2, y_2)$ , 则 $B(-x_2, -y_2)$ ,

由题意可知,  $AF_1$ 的斜率不为0, 可设 $AF_1: x=my-1$ ,

$$\text{则 } BF_1: \frac{y}{x+1} = \frac{y_2}{x_2-1} \quad \text{①}, \quad AF_2: \frac{y}{x-1} = \frac{y_1}{x_1-1} \quad \text{②},$$

$$\therefore \frac{y}{x+1} \cdot \frac{y}{x-1} = \frac{y_1}{x_1-1} \cdot \frac{y_2}{x_2-1} = \frac{y_1}{my_1-2} \cdot \frac{y_2}{my_2-2}$$

$$= \frac{y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 - 2m(y_1 + y_2) + 4}.$$

$$\text{联立 } \begin{cases} x = my - 1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (m^2 + \frac{4}{3})y^2 - 2my - 3 = 0.$$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{2m}{m^2 + \frac{4}{3}}, \quad y_1 y_2 = \frac{-3}{m^2 + \frac{4}{3}},$$

$$\therefore \frac{y^2}{x^2 - 1} = \frac{-3}{-3m^2 + \frac{16}{3}},$$

$$\text{由 ①② 得, } \frac{x+1}{y} + \frac{x-1}{y} = 2m - \frac{2(y_1 + y_2)}{y_1 y_2}, \therefore m = \frac{3x}{5y},$$

$$\therefore \frac{y^2}{x^2 - 1} = \frac{-3}{-3(\frac{3x}{5y})^2 + \frac{16}{3}}, \text{ 整理得: } \frac{x^2}{(\frac{5}{4})^2} + \frac{y^2}{(\frac{3}{4})^2} = 1.$$

$\therefore M$ 的轨迹所在的曲线是椭圆;

$$\text{离心率 } e = \frac{\sqrt{(\frac{5}{4})^2 - (\frac{3}{4})^2}}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}.$$

故答案为: 椭圆;  $\frac{4}{5}$ .

### 三. 解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

$$1. \text{ 解: (1) 证明: 依题意可得 } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n(a_n+1)} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n+1},$$

$$\text{则 } b_n = \frac{1}{a_n+1} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_n+1}, \text{ 又 } b_n = \frac{1}{a_n+1} = \frac{a_n}{a_n+1},$$

$$\text{所以 } S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = 2 - \frac{1}{a_{n+1}},$$

$$T_n = b_1 b_2 \dots b_n = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2a_{n+1}},$$

$$\text{所以 } S_n + 2T_n = 2.$$

$$(2) S_n - T_n = 2 - \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{2a_{n+1}} = 2 - \frac{3}{2a_{n+1}} = \frac{3}{2} \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{a_{n+1}} \right),$$

因为 $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_{n+1} - a_n = a_n^2 > 0$ , 所以 $\{a_n\}$ 单调递增.

又因为 $a_1 = \frac{1}{2}$ ,  $a_2 = \frac{3}{4}$ ,  $a_3 = \frac{21}{16} > \frac{3}{4}$ , 所以当 $n \geq 3$ 时,  $a_n > \frac{3}{4}$ ,

所以当  $n=1$  时,  $S_1=T_1$ ;

当  $n \geq 2$  时,  $S_n > T_n$ .

2. 解: (1) 设  $M(x, y)$ , 依题意  $A(0, 1-r)$ ,

$$\text{满足} \begin{cases} y + 1 - r = 0 \\ x^2 + (y - 1)^2 = r^2 \end{cases}, \text{消} r \text{得} x^2 = 4y,$$

所以  $E: x^2 = 4y (x \neq 0)$ .

(2) 证明: 设  $MN: y = kx + 1$ ,  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$ ,

将  $y = kx + 1$  代入  $x^2 = 4y$  得  $x^2 - 4kx - 4 = 0$ ,

由韦达定理得

$$x_1 + x_2 = 4k, x_1 x_2 = -4,$$

$$MO: y = \frac{y_1}{x_1} \cdot x, \text{令} y = -1 \text{得} x_P = -\frac{x_1}{y_1},$$

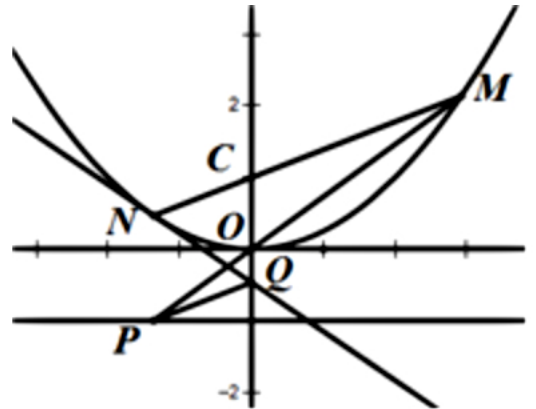
所以  $P(-\frac{x_1}{y_1}, -1)$ ,

因为  $y' = \frac{x}{2}$ , 所以点  $N$  处的切线为  $y - y_2 = \frac{x_2}{2}(x - x_2)$ , 即  $y = \frac{x_2}{2} \cdot x - y_2$ ,

令  $x=0$  得  $y = -y_2$ , 所以  $Q(0, -y_2)$ ,

$$\text{所以} PQ \text{的斜率} k' = \frac{-1 + y_2}{-\frac{x_1}{y_1} - 0} = \frac{1 - \frac{x_2^2}{4}}{\frac{4}{x_1}} = \frac{4x_1 - x_1 x_2^2}{16} = \frac{4x_1 + 4x_2}{16} = k$$

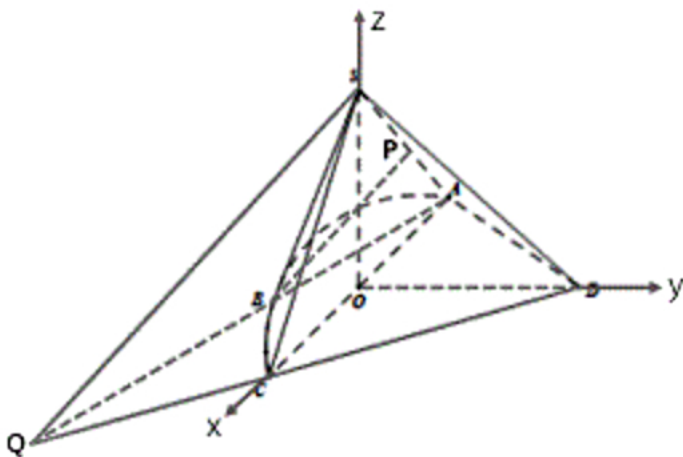
所以  $MN \parallel QP$ .



3. 解: (1) ① 延长  $AB$  交  $DC$  的延长线于点  $Q$ ;

② 连接  $SQ$ ;

③ 过点  $B$  作  $BP \parallel QS$  交  $SA$  于点  $P$ .



(2) 若  $P$  是  $SA$  的中点, 则  $B$  是  $AQ$  的中点,

因为  $B$  是以  $AC$  直径的圆弧上的一点, 所以  $CB \perp AQ$ , 所以  $CA = CQ$ ,

又因为  $CA = CD$ , 所以  $\angle QAD = 90^\circ$ ,

而  $\triangle ACD$  为等边三角形,  $\angle CAD = 60^\circ$ , 所以  $\angle BAC = 30^\circ$ .

依题意,  $OS, OC, OD$  两两垂直, 分别以  $OC, OD, OS$  为  $x, y, z$  轴建立如图所示的空间直角坐标系,

则  $A(-1, 0, 0), D(0, \sqrt{3}, 0), S(0, 0, \sqrt{3}), P(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}), B(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ,

所以  $\overrightarrow{AD} = (1, \sqrt{3}, 0)$ ,  $\overrightarrow{AS} = (1, 0, \sqrt{3})$ ,  $\overrightarrow{BP} = (-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,

设平面  $SAD$  的法向量为  $\vec{n} = (x, y, z)$ , 则 
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AS} = x + \sqrt{3}z = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$$

取  $x = \sqrt{3}$ , 则  $y = z = -1$ , 所以  $\vec{n} = (\sqrt{3}, -1, -1)$ .

设直线  $BP$  与平面  $SAD$  所成角为  $\theta$ ,

$$\text{则 } \sin\theta = |\cos\langle \vec{n}, \overrightarrow{BP} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BP}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{BP}|} = \frac{|-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}|}{\sqrt{5} \times \sqrt{1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}}} = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

故直线  $BP$  与平面  $SAD$  所成角的正弦值为  $\frac{2\sqrt{6}}{5}$ .

4. 解: (1) 6名某疾病病毒密切接触者中有1名感染病毒, 其余5名健康, 从这6名密切接触者中随机抽取3名, 抽到感染者的概率:  $P = \frac{C_5^2}{C_6^3} = \frac{1}{2}$ .

(2)(i)  $\xi$  的可能取值是 1, 2, 3, 4, 5, 且分布列如下:

$\xi$	1	2	3	4	5
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

$$E(\xi) = \frac{10}{3}.$$

(ii) 首先考虑(3, 3)分组, 所需化验次数为  $\eta$ ,  $\eta$  的可能取值是 2, 3,  $P(\eta = 2) = \frac{1}{C_3^1} = \frac{1}{3}$ ,  $P(\eta = 3) = \frac{C_2^1}{C_3^1} = \frac{2}{3}$ , 分布列如下:

$\eta$	2	3
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$E(\eta) = \frac{8}{3}.$$

再考虑(2, 2, 2)分组, 所需化验次数为  $\delta$ ,  $\delta$  的可能取值是 2, 3,  $P(\delta = 2) = \frac{C_5^1}{C_6^2} = \frac{1}{3}$ ,  $P(\delta = 3) = \frac{C_5^2}{C_6^2} = \frac{2}{3}$ , 分布列如下:

$\delta$	2	3
$P$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$E(\delta) = \frac{8}{3}$$

所以按(2, 2, 2)或(3, 3)分组进行化验均可.

5. 解：(1)  $f'(x) = \frac{e}{x} - a = \frac{e-ax}{x}$ .....(1分)

(i) 若  $a \leq 0$ ，则  $f'(x) > 0$ ；.....(2分)

(ii) 若  $a > 0$ ，则由  $f'(x) > 0$  得  $x < \frac{e}{a}$ ，由  $f'(x) < 0$  得  $x > \frac{e}{a}$ ；

综上：当  $a \leq 0$  时， $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增；

当  $a > 0$  时， $f(x)$  在  $(0, \frac{e}{a})$  上单调递增，在  $(\frac{e}{a}, +\infty)$  上单调递减；.....(4分)

(2) 假设存在  $y=kx+b$  满足题意。

(i) 由  $\frac{x^2}{2} - x \geq kx + b$ ，即  $\frac{x^2}{2} - (k+1)x - b \geq 0$ ，得  $\Delta = (k+1)^2 + 2b \leq 0$ ，

所以  $b \leq -\frac{(k+1)^2}{2} \leq 0$ .....(5分)

(ii) 令  $F(x) = \ln x - (a+k)x - b$ ， $F'(x) = \frac{e}{x} - (a+k) = \frac{e-(a+k)x}{x}$ .....(6分)

① 若  $a+k \leq 0$ ，则  $F'(x) > 0$ ， $F(x)$  单调递增， $F(e) = e - (a+k)e - b > 0$ ，不合题意；.....(7分)

② 若  $a+k > 0$ ，则  $F(x)$  在  $(0, \frac{e}{a+k})$  上单调递增，在  $(\frac{e}{a+k}, +\infty)$  上单调递减，

所以  $F(x)_{max} = F(\frac{e}{a+k}) = \ln \frac{e}{a+k} - e - b = -\ln(a+k) - b$ .....(8分)

所以  $-\ln(a+k) - b \leq 0$ ，即  $\ln(a+k) \geq -b$ ，

由 (i) 得  $\ln(a+k) \geq \frac{(k+1)^2}{2}$ .....(9分)

即  $a \geq -k + e^{\frac{(k+1)^2}{2}}$ ，

令  $\varphi(k) = -k + e^{\frac{(k+1)^2}{2}}$ ， $\varphi'(k) = -1 + e^{\frac{(k+1)^2}{2}} \cdot \frac{k+1}{e}$ ，.....(10分)

$\varphi'(k) = e^{\frac{(k+1)^2}{2}} \cdot (\frac{k+1}{e})^2 + e^{\frac{(k+1)^2}{2}} \cdot \frac{1}{e} > 0$ ，所以  $\varphi'(k)$  单调递增，

又因为  $\varphi'(\sqrt{e}-1) = 0$ ，

所以  $\varphi(x)$  在  $(-\infty, \sqrt{e}-1)$  是单调递减， $(\sqrt{e}-1, +\infty)$  是单调递增，

所以  $\varphi(x)_{min} = \varphi(\sqrt{e}-1) = 1$ ，所以  $a \in [1, +\infty)$ .....(12分)

请考生在第22、23两题中任选一题作答.注意：只能做所选定的题目.如果多做，则按所做第一个题目计分，作答时请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.【选修4-4：坐标系与参数方程】(10分)

1. 解：(1) 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{3}t}{2} \\ y = \frac{t}{2} \end{cases}$ ，( $t$  为参数)，转换为普通方程为： $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho^2 = \frac{12}{3+\sin^2\theta}$ 。根据  $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$  整理得  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) 设  $A, B$  对应的直线参数为  $t_1, t_2$ ，

将  $\begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{3}t}{2} \\ y = \frac{t}{2} \end{cases}$ ，代入  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  得  $13t^2 + 12\sqrt{3}t - 36 = 0$ ，故  $t_1 + t_2 = \frac{-12\sqrt{3}}{13}$ 。

当  $A$  在  $x$  轴上方， $|AF| - |BF| = 2a - t_1 - (2a + t_2) = -t_1 - t_2 = \frac{12\sqrt{3}}{13}$

当  $A$  在  $x$  轴下方， $|AF| - |BF| = -\frac{12\sqrt{3}}{13}$ 。

【选修4-5：不等式选讲】(10分)



1. 解：(1)若 $a=2$ ，则 $f(x) = \begin{cases} -3x + 5, & x \leq 1 \\ -x + 3, & 1 < x \leq 2, \\ 3x - 5, & x > 2 \end{cases}$

故 $f(x)_{\min} = f(2) = 1$ ；

(2)令 $x=1$ 得 $a \geq -1$ ，

此时 $f(x) = |x-1| + a|x-2| \geq |x-1| - |x-2| \geq -|x-1-x+2| = -1$ ，

所以 $a \in [-1, +\infty)$ 。