2019-2020学年高二第一学期期末数学试卷（理科）

一、选择题

1．某种食品的广告词是："幸福的人们都拥有"，初听起来，这似乎只是普通的赞美说词，然而它的实际效果可大了，原来这句话的等价命题是（　　）

A．不拥有的人们不一定幸福

B．不拥有的人们可能幸福

C．拥有的人们不一定幸福

D．不拥有的人们就不幸福

2．已知$\overrightarrow{a}$=（2，－1，3），$\overrightarrow{b}$=（－1，4，－2），$\overrightarrow{c}$=（7，5，λ），若$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$三向量不能构成空间的一个基底，则实数λ的值为（　　）

A．$\frac{65}{7}$　　B．9　　C．$\frac{35}{7}$　　D．0

3．《孙子算经》是我国古代的数学名著，书中有如下问题："今有五等诸侯，共分橘子六十颗，人别加三颗．问：五人各得几何？"其意思为"有5个人分60个橘子，他们分得的橘子，数成公差为3的等差数列，问5人各得多少橘子．"根据上述问题的已知条件，分得橘子最多的人所得的橘子个数为（　　）

A．15　　B．16　　C．18　　D．21

4．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的实轴长是虚轴长的两倍，则它的渐近线方程为（　　）

A．$y=\pm\frac{1}{2}x$　　B．$y=\pm\sqrt{2}x$　　C．$y=\pm 2x$　　D．$y=\pm\sqrt{3}x$

5．已知$a>0>b$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A．$a^2<-ab$　　B．$|a|<|b|$

C．$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　D．$(\frac{1}{2})^a>(\frac{1}{2})^b$

6．已知△ABC的三个内角分别为A，B，C，则"$A<B<C$"是"$\cos A>\cos B>\cos C$"的（　　）

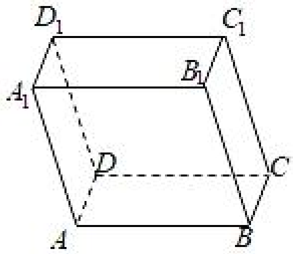
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

7．等比例数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，公比为q，若$S_6=9S_3$，$S_5=62$，则a_1=（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．2　　C．$\sqrt{5}$　　D．3

8．如图，已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，$AA_1=2$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=120°$，则线段 AC_1 的长为（　　）



A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．2

9．已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F（3，0），过点 F 的直线交椭圆 E 于 A、B 两点．若 AB 的中点坐标为（1，－1），则 E 的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$　　B．$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

C．$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}=1$　　D．$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

10．设 $0<m<\frac{1}{2}$，若 $\frac{1}{m}+\frac{2}{1-2m}\geqslant k^2-2k$ 恒成立，则 k 的取值范围为（　　）

A．[－2，0）∪（0，4]　　B．[－4，0）∪（0，2] C．[－4，2]　　D．[－2，4]

11．已知点 F 是抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点，过点 F 的直线与抛物线相交于 A，B 两点（点 A 在 x 轴上方），与 y 轴的正半轴相交于点 N，点 Q 是抛物线不同于 A，B 的点，若 $2\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{QN}+\overrightarrow{QF}$，则$|BF|$：$|BA|$：$|BN|$＝（　　）

A．1：2：4　　B．2：3：4　　C．2：4：5　　D．2：3：6

12．设 f（x）为最接近$\sqrt{n}$（$n\in N^*$）的整数，如 f（1）＝1，f（2）＝1，f（3）＝2，f（4）＝2，f（5）＝2，…，若正整数 m 满足$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(m)}=4034$，则 m＝（　　）

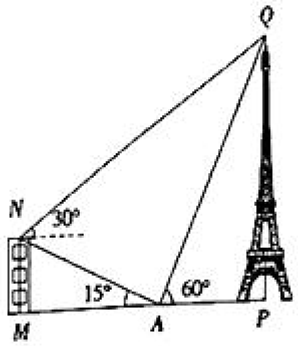
A．2016×2017　　B．2017^2　　C．2017×2018　　D．2018×2019

二、填空题

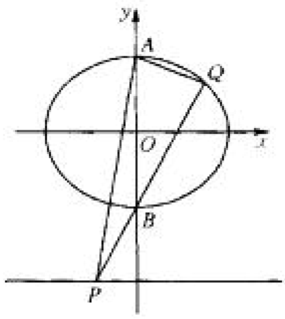
13．若 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\leqslant 2\\y\geqslant 0\end{cases}$，则 $z=2x-y$ 的最小值为_______．

14．已知命题 p：$\exists x_0\in[0,\ \pi]$，使得 $\sin x_0<a$，命题 q：$\forall x\in[\frac{1}{2},\ 3]$，$\frac{1}{x}+1>a$，若 $p\wedge q$ 为真命题，则实数 a 的取值范围为_______．

15．如图，某校一角读书亭 MN 的高为 $(30-10\sqrt{3})\pi$，在该读书亭的正东方向有一个装饰灯塔 PQ，在它们之间的地面点 A（M、A、P 三点共线）处测得读书亭顶部 N 与灯塔顶部 Q 的仰角分别是 15°和 60°，在读书亭顶部 N 测得灯塔顶部 Q 的仰角为 30°，则灯塔 PQ 的高为_______m．



16．如图，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 A，B 分别是椭圆 C 的上、下顶点，点 P 是直线 $y=-2b$ 上的一个动点（与 y 轴交点除外），直线 PB 与椭圆 C 交于另一点 Q，直线 AP，AQ 的斜率的乘积恒为 -2，则椭圆 C 的离心率为_______．



三、解答题：

17．在平面四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC=90°$，$\angle A=45°$，$AB=2$，$BD=5$．

（1）求 $\cos\angle ADB$；

（2）若 $DC=2\sqrt{2}$，求 BC．

18．已知 S_n 是单调递减等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_2=\frac{1}{2}$，且 S_4+a_4，S_6+a_6，S_5+a_5 成等差数列．

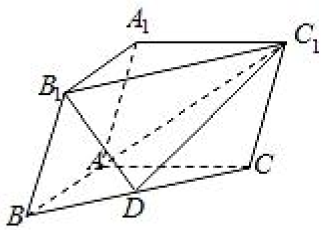
（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若数列$\{b_n\}$满足$b_n=-\log_2 a_n+\lambda n$（$\lambda\neq-1$），数列$\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\}$的前$n$项和$T_n$满足$T_{2019}=2019$，求$\lambda$的值．

19．已知三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AC=AA_1$，侧面$ABB_1A_1\perp$底面ABC，D是BC的中点，$\angle B_1BA=60°$，$B_1D\perp AB$．

（Ⅰ）求证：$\triangle ABC$为直角三角形；

（Ⅱ）求二面角C_1-AD-B的余弦值．



20．党的"十八大"之后，做好农业农村工作具有特殊重要的意义．国家为了更好地服务于农民、开展社会主义新农村工作，派调查组到农村某地区考察．该地区有100户农民，且都从事蔬菜种植．据了解，平均每户的年收入为6万元．为了调整产业结构，当地政府决定动员部分农民从事蔬菜加工．据统计，若动员x（$x>0$）户农民从事蔬菜加工，则剩下的继续从事蔬菜种植的农民平均每户的年收入有望提高$3x\%$，而从事蔬菜加工的农民平均每户的年收入为$6(a-\frac{3x}{50})(a>0)$万元．

（1）在动员x户农民从事蔬菜加工后，要使剩下（$100-x$）户从事蔬菜种植的所有农民总年收入不低于动员前100户从事蔬菜种植的所有农民年总年收入，求x（$x>0$，$x\in N^*$）的取值范围；

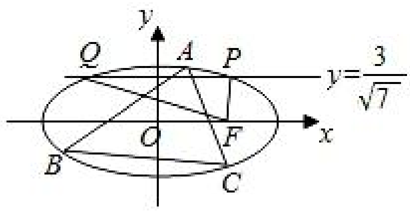
（2）在（1）的条件下，要使这x户农民从事蔬菜加工的总年收入始终不高于（$100-x$）户从事蔬菜种植的所有农民年总年收入，求a的最大值．（参考数据：$\frac{100}{\sqrt{3}}=57.7$，$\frac{100}{57}=1.75$，$\frac{100}{58}=1.72$）

及5758

21．已知右焦点为F的椭圆M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1$（$a>\sqrt{3}$）与直线$y=\frac{3}{\sqrt{7}}$相交于$P$，$Q$两点，且$PF\perp QF$．

（1）求椭圆M的方程：

（2）O为坐标原点，A，B，C是椭圆E上不同三点，并且O为$\triangle ABC$的重心，试探究$\triangle ABC$的面积是否为定值，若是，求出这个定值；若不是．说明理由．



[选修4-4：坐标系与参数方程]

22．在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程是 $\begin{cases} x=\dfrac{8k}{1+k^2} \\ y=\dfrac{3(1-k^2)}{1+k^2} \end{cases}$（$k$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}$.

（1）曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

（2）求曲线 C 上的点到直线 l 的距离的取值范围.

[选修4-5，不等式选讲]

23．设函数 $f(x)=|2x-1|+|x-a|$，$x\in\mathbb{R}$.

（Ⅰ）当 $a=4$ 时，求不等式 $f(x)>9$ 的解集；

（Ⅱ）对任意 $x\in\mathbb{R}$，恒有 $f(x)-|x-\frac{1}{2}|\geq 5-a$，求实数 a 的取值范围.

参考答案

一.选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．某种食品的广告词是："幸福的人们都拥有"，初听起来，这似乎只是普通的赞美说词，然而它的实际效果可大了，原来这句话的等价命题是（　　）

A．不拥有的人们不一定幸福

B．不拥有的人们可能幸福

C．拥有的人们不一定幸福

D．不拥有的人们就不幸福

解："幸福的人们都拥有"

我们可将其化为：

如果人是幸福的，则这个人拥有某种食品

它的逆否命题为：如果这个没有拥有某种食品，则这个人是不幸福的

即"不拥有的人们就不幸福"

故选：*D*.

2．已知$\overrightarrow{a}$=（2，－1，3），$\overrightarrow{b}$=（－1，4，－2），$\overrightarrow{c}$=（7，5，λ），若$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$三向量不能构成空间的一个基底，则实数λ的值为（　　）

A．$\frac{65}{7}$　　B．9　　C．$\frac{35}{7}$　　D．0

解：∵$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$三向量不能构成空间的一个基底，

∴此三个向量共面，

∴存在实数 m，n，使得$\overrightarrow{c}=m\overrightarrow{a}+n\overrightarrow{b}$，

∴（7，5，λ）＝m（2，－1，3）+n（－1，4，－2），

∴$2m-n=7$，$-m+4n=5$，$3m-2n=\lambda$，

解得$\lambda=\frac{65}{7}$.

故选：*A*.

3．《孙子算经》是我国古代的数学名著，书中有如下问题："今有五等诸侯，共分橘子六十颗，人别加三颗．问：五人各得几何？"其意思为"有5个人分60个橘子，他们分得的橘子，数成公差为3的等差数列，问5人各得多少橘子．"根据上述问题的已知条件，

分得橘子最多的人所得的橘子个数为（　　）

A．15　　B．16　　C．18　　D．21

解：设第一个人分到的橘子个数为 a_1，

由题意得：$S_5=5a_1+\frac{5\times4}{2}\times3=60$，

解得 $a_1=6$．

则 $a_5=a_1+(5-1)\times3=6+12=18$．

∴得到橘子最多的人所得的橘子个数是18．

故选：C．

4．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的实轴长是虚轴长的两倍，则它的渐近线方程为（　　）

A．$y=\pm\frac{1}{2}x$　　B．$y=\pm\sqrt{2}x$　　C．$y=\pm2x$　　D．$y=\pm\sqrt{3}x$

解：双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的实轴长是虚轴长的两倍，

可得 $a=2b$，

它的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，即 $y=\pm\frac{1}{2}x$．

故选：A．

5．已知 $a>0>b$，则下列不等式一定成立的是（　　）

A．$a^2<-ab$　　B．$|a|<|b|$

C．$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　D．$\left(\frac{1}{2}\right)^a>\left(\frac{1}{2}\right)^b$

解：$a^2+ab=a(a+b)$，符合无法确定，故 A 错误，

取 $a=2$，$b=-1$，则有$|a|>|b|$，故 B 错误，

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0$，故$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故 C 正确，

取 $a=1$，$b=-2$，则 $\left(\frac{1}{2}\right)^a=\frac{1}{2}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^b=4$，又$\frac{1}{2}<4$，即 $\left(\frac{1}{2}\right)^a<\left(\frac{1}{2}\right)^b$，故 D 错误，

故选：C．

6．已知△ABC 的三个内角分别为 A，B，C，则“$A<B<C$”是“$\cos A>\cos B>\cos C$”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C. 充分必要条件　　　　　　　　　　D. 既不充分也不必要条件

解：$\triangle ABC$的三个内角分别为 A，B，C，

在三角形中，由 $y=\cos x$ 在（0，π）上是减函数，

所以 $\cos A<\cos B<\cos C$，反之也成立，

故选：C.

7. 等比例数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，公比为 q，若 $S_6=9S_3$，$S_5=62$，则 $a_1=$（　　）

A. $\sqrt{2}$　　　　B. 2　　　　C. $\sqrt{5}$　　　　D. 3

解：根据题意，等比例数列$\{a_n\}$中，若 $S_6=9S_3$，则 $q\neq\pm1$，

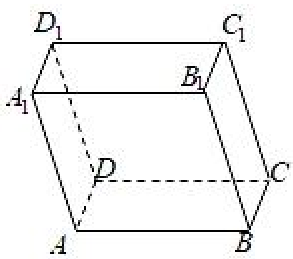
若 $S_6=9S_3$，则$\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=9\times\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}$，解可得 $q^3=8$，则 $q=2$，

又由 $S_5=62$，则有 $S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=31a_1=62$，

解可得 $a_1=2$；

故选：B.

8. 如图，已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，$AA_1=2$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=120°$，则线段 AC_1 的长为（　　）



A. 1　　　　B. $\sqrt{2}$　　　　C. $\sqrt{3}$　　　　D. 2

解：∵平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

底面 $ABCD$ 是边长为 1 的正方形，$AA_1=2$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=120°$，

$\therefore \overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$，

$\therefore \overrightarrow{AC_1}^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1})^2$

$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CC_1}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC_1}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CC_1}$

$=1+1+4+2\times1\times2\times\cos120°+2\times1\times2\times\cos120°$

$=2$.

∴线段 AC_1 的长为 $|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{2}$.

故选：*B*.

9．已知椭圆 *E*：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 *F*（3，0），过点 *F* 的直线交椭圆 *E* 于 *A*、*B* 两点．若 *AB* 的中点坐标为（1，－1），则 *E* 的方程为（　　）

A．$\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$　　　　B．$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$

C．$\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{18}=1$　　　　D．$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$

解：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

代入椭圆方程得 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}$，

相减得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，

∴$\frac{x_1+x_2}{a^2}+\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{b^2}=0$.

∵$x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=-2$，$k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{-1-0}{1-3}=\frac{1}{2}$.

∴$\frac{2}{a^2}+\frac{1}{2}\times\frac{-2}{b^2}=0$，

化为 $a^2=2b^2$，又 $c=3=\sqrt{a^2-b^2}$，解得 $a^2=18$，$b^2=9$.

∴椭圆 *E* 的方程为 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$.

故选：*D*.

10．设 $0<m<\frac{1}{2}$，若 $\frac{1}{m}+\frac{2}{1-2m}\geqslant k^2-2k$ 恒成立，则 *k* 的取值范围为（　　）

A．[－2，0）∪（0，4]　　　　B．[－4，0）∪（0，2]　C．[－4，2]

D．[－2，4]

解：由于$0<m<\frac{1}{2}$，则得到$\frac{1}{2}\cdot 2m\cdot(1-2m)\leqslant\frac{1}{2}\cdot[\frac{2m+(1-2m)}{2}]^2=\frac{1}{8}$

（当且仅当$2m=1-2m$，即$m=\frac{1}{4}$时，取等号）

$\therefore\frac{1}{m}+\frac{2}{1-2m}=\frac{1}{m(1-2m)}\geqslant 8$

$\because\frac{1}{m}+\frac{2}{1-2m}\geqslant k^2-2k$恒成立，

$\therefore k^2-2k-8\leqslant 0$，

$\therefore -2\leqslant k\leqslant 4$.

故选：D.

11．已知点F是抛物线C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点，过点F的直线与抛物线相交于A，B两点（点A在x轴上方），与y轴的正半轴相交于点N，点Q是抛物线不同于A，B的点，若$2\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{QN}+\overrightarrow{QF}$，则$|BF|$：$|BA|$：$|BN|=$（　　）

A．1：2：4　　B．2：3：4　　C．2：4：5　　D．2：3：6

解：由题意如图所示，若$2\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{QN}+\overrightarrow{QF}$，可得$2\overrightarrow{QA}=(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AN})+(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AF})=2\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AF}$，可得$\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{0}$，可得$A$为$NF$的中点；

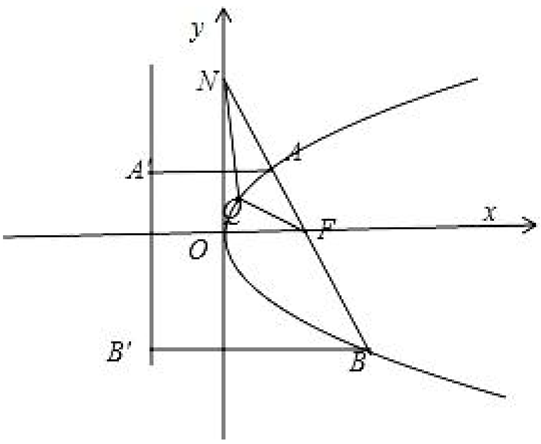
因为焦点$F(\frac{p}{2},0)$，所以$x_A=\frac{P}{4}$，代入抛物线的方程可得$y_A=\frac{\sqrt{2}}{2}p$，即$A(\frac{p}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}p)$，所以$N(0,\sqrt{2}p)$，

设$B(\frac{{y_0}^2}{2p},y_0)$，$y_0<0$，由$\frac{OF}{x_B}=\frac{y_N}{y_N-y_B}$，即$\frac{\frac{p}{2}}{\frac{{y_0}^2}{2p}}=\frac{\sqrt{2}p}{\sqrt{2}p-y_0}$可得：$y_0=-\sqrt{2}p$，$x_0=p$，即$B(p,-\sqrt{2}p)$，

所以：$|BF|=x_0+\frac{p}{2}=\frac{3}{2}p$，$|BA|=\frac{1}{4}p+p+p=\frac{9}{4}p$，$|BN|=\sqrt{p^2+(\sqrt{2}p+\sqrt{2}p)^2}=3p$，

所以$|BF|$：$|BA|$：$|BN|=\frac{3}{2}p$：$\frac{9}{4}p$：$3p=2$：3：4，

故选：B.



12．设 f（x）为最接近$\sqrt{n}$（$n\in N^{*}$）的整数，如 f（1）＝1，f（2）＝1，f（3）＝2，f（4）＝2，f（5）＝2，…，若正整数 m 满足$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(m)}$＝4034，则 m＝（　　）

A．2016×2017　　B．2017^{2}　　C．2017×2018　　D．2018×2019

解：由$\frac{1}{f(1)}$＝1，$\frac{1}{f(2)}$＝1，2 个

$\frac{1}{f(3)}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{f(4)}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{f(5)}=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{f(6)}=\frac{1}{2}$，4 个

$\frac{1}{f(7)}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{f(8)}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{f(9)}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{f(10)}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{f(11)}=\frac{1}{3}$，$\frac{1}{f(12)}=\frac{1}{3}$，6 个

$\frac{1}{f(13)}=\frac{1}{4}$，$\frac{1}{f(14)}=\frac{1}{4}$，…$\frac{1}{f(20)}=\frac{1}{4}$，8 个

…

…$\frac{1}{f[m\times(m+1)]}=\frac{1}{m}$，

∴$\frac{1}{f(1)}+\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(3)}+\cdots+\frac{1}{f(m)}=1\times2+\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{3}\times6+\cdots+\frac{1}{n}\times2n=4034$，

则n＝4034，则 $2n$＝4034，则 n＝2017，

∴总共有 2017 个$\frac{1}{2017}$，

则 f（$\frac{1}{2017\times2018}$）$=\frac{1}{m}$，

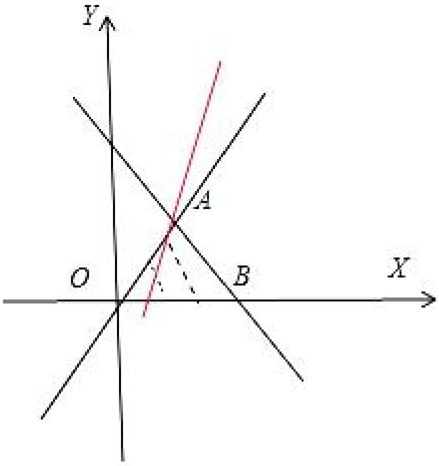
故 m 的值为 2017×2018；

故选：C.

二、填空题：

13．若 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x-y\geqslant0\\x+y\leqslant2\\y\geqslant0\end{cases}$，则 $z=2x-y$ 的最小值为__0__．

解：作出 x，y 满足约束条件所对应的可行域（如图阴影部分），



变形目标函数可得 $y=2x-z$，平移直线 $y=2x$ 可知，

当直线经过点 O（0，0）时，截距 $-z$ 取最大值，

目标函数 z 取最小值 $2\times0-0=0$，

故答案为：0．

14．已知命题 p：$\exists x_0\in[0,\ \pi]$，使得 $\sin x_0<a$，命题q：$\forall x\in[\frac{1}{2},\ 3]$，$\frac{1}{x}+1>a$，若 $p\wedge q$ 为真命题，则实数 a 的取值范围为____（0，$\frac{4}{3}$）____．

解：由 $p\wedge q$ 为真命题，得 p，q 均为真命题，

命题 p：$\exists x_0\in[0,\ \pi]$，使得 $\sin x_0<a$ 为真命题，$\therefore a>(\sin x_0)_{min}$，

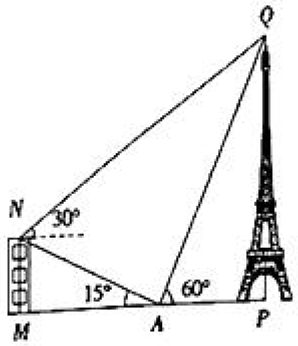
则 $a>0$；

若命题 q：对 $\forall x\in[\frac{1}{2},\ 3]$，$\frac{1}{x}+1>a$ 为真命题，则 $a<(\frac{1}{x}+1)_{min}$．$\therefore a<\frac{4}{3}$；

$\therefore a$ 的取值范围是（0，$\frac{4}{3}$），

故答案为：（0，$\frac{4}{3}$）．

15．如图，某校一角读书亭 MN 的高为 $(30-10\sqrt{3})$π，在该读书亭的正东方向有一个装饰灯塔 PQ，在它们之间的地面点 A（M、A、P 三点共线）处测得读书亭顶部 N 与灯塔顶部 Q 的仰角分别是15°和60°，在读书亭顶部 N 测得灯塔顶部 Q 的仰角为30°，则灯塔 PQ 的高为__60__m．



解：在直角三角形 *ANM* 中，$AN=\frac{MN}{\sin15°}=\frac{30-10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=20\sqrt{6}$,

在△*AQN* 中，∠*ANQ*＝30°+15°＝45°，∠*NAQ*＝180°－15°－60°＝105°，

故∠*AQN*＝180°－45°－105°＝30°，

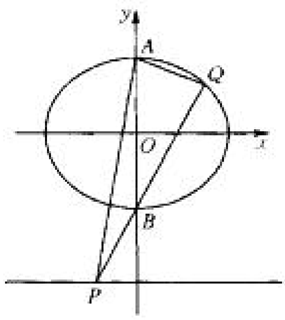
在△*ANQ* 中，由正弦定理，$\frac{AN}{\sin30°}=\frac{AQ}{\sin45°}$,

所以 $AQ=\frac{20\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=40\sqrt{3}$,

在直角三角形 *APQ* 中，$PQ=AQ\sin60°=60$.

故答案为：60

16．如图，已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，点 *A*，*B* 分别是椭圆 *C* 的上、下顶点，点 *P* 是直线 $y=-2b$ 上的一个动点（与 *y* 轴交点除外），直线 *PB* 与椭圆 *C* 交于另一点 *Q*，直线 *AP*，*AQ* 的斜率的乘积恒为－2，则椭圆 *C* 的离心率为__$\frac{\sqrt{3}}{3}$__.



解：由题意设 *A*（0，*b*），*B*（0，－*b*），*P*（*t*，－2*b*），

直线 *PB* 的方程为 $y=-\frac{b}{t}x-b$，联立椭圆方程 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，

消去 *y* 可得 $\left(b^2+\frac{a^2b^2}{t^2}\right)x^2+\frac{2a^2b^2}{t}x=0$,

解得 $x=0$ 或 $x=-\frac{2a^2t}{a^2+t^2}$,

则 $Q\left(-\frac{2a^2t}{a^2+t^2}, \frac{a^2b-bt^2}{a^2+t^2}\right)$,

直线 AP, AQ 的斜率的乘积恒为 -2,

即为 $-\frac{3b}{t}\cdot\frac{2bt^2}{2a^2t}=-2$, 化为 $2a^2=3b^2=3(a^2-c^2)$,

则 $a^2=3c^2$,

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

三、解答题:

17. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle ADC=90°$, $\angle A=45°$, $AB=2$, $BD=5$.

(1) 求 $\cos\angle ADB$;

(2) 若 $DC=2\sqrt{2}$, 求 BC.

解: (1) ∵ $\angle ADC=90°$, $\angle A=45°$, $AB=2$, $BD=5$.

∴由正弦定理得: $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle A}$, 即 $\frac{2}{\sin\angle ADB}=\frac{5}{\sin45°}$,

∴ $\sin\angle ADB=\frac{2\sin45°}{5}=\frac{\sqrt{2}}{5}$,

∵ $AB<BD$, ∴ $\angle ADB<\angle A$,

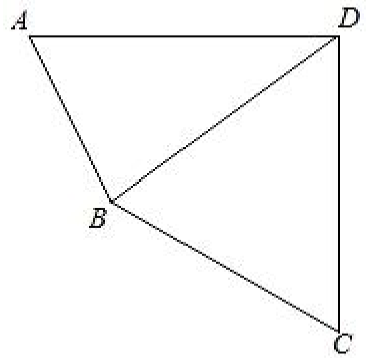
∴ $\cos\angle ADB=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{23}}{5}$.

(2) ∵ $\angle ADC=90°$, ∴ $\cos\angle BDC=\sin\angle ADB=\frac{\sqrt{2}}{5}$,

∵ $DC=2\sqrt{2}$,

∴ $BC=\sqrt{BD^2+DC^2-2\times BD\times DC\times\cos\angle BDC}$

$=\sqrt{25+8-2\times5\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{5}}=5$.



18．已知 S_n 是单调递减等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_2=\dfrac{1}{2}$，且 S_4+a_4，S_6+a_6，S_5+a_5 成等差数列．

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=-\log_2 a_n+\lambda n$（$\lambda\neq-1$），数列 $\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\}$ 的前 n 项和 T_n 满足 $T_{2019}=2019$，求 λ 的值．

解：（Ⅰ）设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

由 S_4+a_4，S_6+a_6，S_5+a_5 成等差数列，得 $2(S_6+a_6)=S_4+a_4+S_5+a_5$，

得 $(S_6-S_5)+(S_6-S_4)+2a_6=a_4+a_5$，即 $4a_6=a_4$，

$\therefore q^2=\dfrac{1}{4}$，

$\because \{a_n\}$ 是单调递减数列，$\therefore q=\dfrac{1}{2}$，

又 $a_2=\dfrac{1}{2}$，$\therefore a_n=(\dfrac{1}{2})^{n-1}$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $b_n=-\log_2(\dfrac{1}{2})^{n-1}+\lambda n=(\lambda+1)n-1$，

$\therefore$

$$\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{[(\lambda+1)n-1]\cdot[(\lambda+1)(n+1)-1]}=\frac{1}{\lambda+1}\left[\frac{1}{(\lambda+1)n-1}-\frac{1}{(\lambda+1)(n+1)-1}\right]$$

，

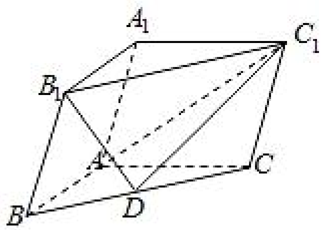
$\therefore T_{2019}=\dfrac{1}{\lambda+1}(\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{1}{2020\lambda+2019})=\dfrac{2019}{\lambda(2020\lambda+2019)}=2019$，解得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=\dfrac{1}{2020}$，

$\because \lambda\neq-1$，$\therefore \lambda=\dfrac{1}{2020}$．

19．已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC=AA_1$，侧面 $ABB_1A_1\perp$ 底面 ABC，D 是 BC 的中点，$\angle B_1BA=60°$，$B_1D\perp AB$．

（Ⅰ）求证：$\triangle ABC$为直角三角形；

（Ⅱ）求二面角 C_1-AD-B 的余弦值.



解：（Ⅰ）取 AB 的中点 O，连接 OD，OB_1，

在$\triangle ABB_1$中，$AB=BB_1$，$\angle B_1BA=60°$，

故$\triangle ABB_1$是等边三角形，$\therefore AB\perp OB_1$，

又 $AB\perp DB_1$，而 OB_1 与 DB_1 相交于 B_1，

$\therefore AB\perp$平面 DOB_1，

故 $AB\perp OD$，又 $OD// AC$，$\therefore AC\perp AB$，

$\therefore \triangle ABC$为 Rt$\triangle$；

（Ⅱ）以 O 为坐标原点，分别以 OB，OD，OB_1 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

可令 $AB=AC=AA_1=2$，则 $C(-1,2,0)$，$A(-1,0,0)$，$D(0,1,0)$，

$B(1,0,0)$，$B_1(0,0,\sqrt{3})$，

$\therefore \overrightarrow{BB_1}=(-1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，

$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BB_1}=(-1,2,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AD}=(1,1,0)$，

设平面 ADC_1 的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$，由题意有

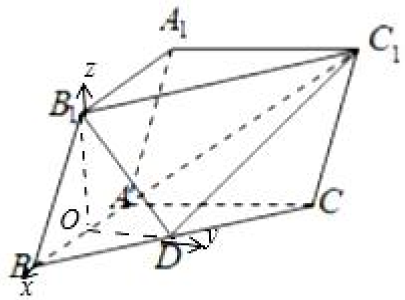
$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AD}=x+y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}=-x+2y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=\sqrt{3}$，$\therefore \vec{m}=(1,-1,\sqrt{3})$，

又侧面 $ABB_1A_1\perp$底面 ABC，可得 $OB_1\perp$平面 ABC，

可得平面 ADB 的法向量为$\vec{n}=(0,0,1)$，

$\cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\times 1}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

二面角 C_1-AD-B 的平面角为钝角，可得二面角 C_1-AD-B 的余弦值为$-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.



20．党的“十八大”之后，做好农业农村工作具有特殊重要的意义．国家为了更好地服务于农民、开展社会主义新农村工作，派调查组到农村某地区考察．该地区有100户农民，且都从事蔬菜种植．据了解，平均每户的年收入为6万元．为了调整产业结构，当地政府决定动员部分农民从事蔬菜加工．据统计，若动员 x（$x>0$）户农民从事蔬菜加工，则剩下的继续从事蔬菜种植的农民平均每户的年收入有望提高 $3x\%$，而从事蔬菜加工的农民平均每户的年收入为 $6(a-\frac{3x}{50})(a>0)$ 万元．

（1）在动员 x 户农民从事蔬菜加工后，要使剩下（$100-x$）户从事蔬菜种植的所有农民总年收入不低于动员前100户从事蔬菜种植的所有农民年总年收入，求 x（$x>0$，$x\in N^*$）的取值范围；

（2）在（1）的条件下，要使这 x 户农民从事蔬菜加工的总年收入始终不高于（$100-x$）户从事蔬菜种植的所有农民年总年收入，求 a 的最大值．（参考数据：$\frac{100}{\sqrt{3}}=57.7$，$\frac{100}{57}=1.75$，$\frac{100}{58}=1.72$）

及5758

解：（1）由题意得 $6(100-x)(1+\frac{3x}{100})\geqslant 6\times 100$，$3x^2-200x\leqslant 0$，

$\therefore 0<x\leqslant \frac{200}{3}$，

又 $x\in N^*$，所以 $0<x\leqslant 66$（$x\in N^*$）；

（2）x 户农民从事蔬菜加工的总年收入为 $6(a-\frac{3x}{50})x$ 万元，

从事蔬菜种植的所有农民年总年收入 $6(100-x)(1+\frac{3x}{100})$ 万元，

依题意得 $6(a-\frac{3x}{50})x\leqslant 6(100-x)(1+\frac{3x}{100})$ 恒成立，

$ax\leqslant 100+\frac{3}{100}x^2+2x$，$a\leqslant \frac{100}{x}+\frac{3x}{100}+2$ 恒成立，

$\because y=\frac{100}{x}+\frac{3x}{100}$ 在 $(0,\frac{100}{\sqrt{3}})$ 上递减，在 $(\frac{100}{\sqrt{3}},100)$ 递增，

$x=57$，$y=\frac{100}{57}+\frac{3\times 57}{100}+2=1.75+1.71+2=5.46$，

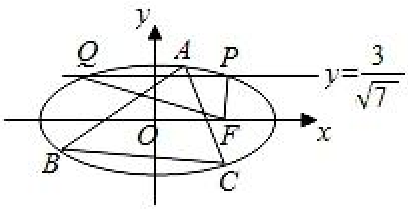
$x=58$，$y=\frac{100}{58}+\frac{3\times 58}{100}+2=1.72+1.74+2=5.46$，

∴$a\leqslant 5.46$.

21．已知右焦点为 F 的椭圆 M: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1$（$a>\sqrt{3}$）与直线 $y=\frac{3}{\sqrt{7}}$ 相交于 P，Q 两点，且 $PF\perp QF$.

（1）求椭圆 M 的方程：

（2）O 为坐标原点，A，B，C 是椭圆 E 上不同三点，并且 O 为△ABC 的重心，试探究△ABC 的面积是否为定值，若是，求出这个定值；若不是．说明理由．



解：（1）设 F（c，0），P（t，$\frac{3}{\sqrt{7}}$），Q（$-t$，$\frac{3}{\sqrt{7}}$），

代入椭圆方程可得 $\frac{t^2}{a^2}+\frac{3}{7}=1$，即 $t^2=\frac{4}{7}a^2$①

且 $PF\perp QF$，可得 $\frac{\frac{3}{\sqrt{7}}}{t-c}\cdot\frac{\frac{3}{\sqrt{7}}}{-t-c}=-1$，

即 $c^2-t^2=-\frac{9}{7}$，②

由①②可得 $c^2=\frac{4}{7}a^2-\frac{9}{7}$.

又 $a^2-c^2=3$，

解得 $a=2$，$c=1$，

即有椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（2）设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，

代入椭圆方程 $3x^2+4y^2=12$，

可得（$3+4k^2$）$x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

则 $x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$，$x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2}$，$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=\frac{6m}{3+4k^2}$，

由 O 为△ABC 的重心，可得 $\overrightarrow{OC}=-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$=(\frac{8km}{3+4k^2}，-\frac{6m}{3+4k^2})$，

由 C 在椭圆上，则有 $3(\frac{8km}{3+4k^2})^2+4(-\frac{6m}{3+4k^2})^2=12$，

化简可得 $4m^2=3+4k^2$，

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(-\frac{8km}{3+4k^2})^2-4\cdot\frac{4m^2-12}{3+4k^2}}$

$=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{3+4k^2}\cdot\sqrt{9+12k^2-3m^2}$，

C 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|kx_C+m-y_C|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|3m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{6|m|}{3+4k^2}\cdot\sqrt{9+12k^2-3m^2}=\frac{6|m|}{4m^2}\cdot\sqrt{12m^2-3m^2}=\frac{9}{2}$.

当直线 AB 的斜率不存在时，$|AB|=3$，$d=3$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{9}{2}$.

综上可得，△ABC 的面积为定值 $\frac{9}{2}$.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22．在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程是 $\begin{cases}x=\frac{8k}{1+k^2}\\ y=\frac{3(1-k^2)}{1+k^2}\end{cases}$（$k$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=3\sqrt{2}$.

（1）曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

（2）求曲线 C 上的点到直线 l 的距离的取值范围．

解：（1）曲线 C 的参数方程是 $\begin{cases}x=\frac{8k}{1+k^2}\\ y=\frac{3(1-k^2)}{1+k^2}\end{cases}$（$k$ 为参数），平方后得 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$，

又$y=-3+\frac{6}{k^2+1}\in(-3,3]$，曲线 C 的普通方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1(y\neq -3)$.

直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{4})=3\sqrt{2}$，转换为直角坐标方程为 $x-y-6=0$.

（2）将曲线 C 化成参数方程形式为$\begin{cases}x=4\cos\alpha\\ y=3\sin\alpha\end{cases}$（α为参数），

则 $d=\frac{|4\cos\alpha-3\sin\alpha-6|}{\sqrt{2}}=\frac{|5\sin(\alpha+\theta)-6|}{\sqrt{2}}$，其中$\tan\theta=\frac{3}{4}$，

所以$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant d\leqslant\frac{11\sqrt{2}}{2}$.

[选修 4-5，不等式选讲]

23. 设函数 $f(x)=|2x-1|+|x-a|$，$x\in R$.

（Ⅰ）当 $a=4$ 时，求不等式 $f(x)>9$ 的解集；

（Ⅱ）对任意 $x\in R$，恒有 $f(x)-|x-\frac{1}{2}|\geqslant 5-a$，求实数 a 的取值范围.

解：（Ⅰ）当 $a=4$ 时，$f(x)=\begin{cases}-3x+5, & x\leqslant\frac{1}{2}\\ x+3, & \frac{1}{2}<x<4\\ 3x-5, & x\geqslant 4\end{cases}$，

∴$f(x)>9$ 的解集为$\{x|x<-\frac{4}{3}或x>\frac{14}{3}\}$；

（Ⅱ）$f(x)=|x-\frac{1}{2}|+|x-\frac{1}{2}|+|x-a|\geqslant|x-\frac{1}{2}|+|(x-\frac{1}{2})-(x-a)|=|x-\frac{1}{2}|+|a-\frac{1}{2}|\geqslant|a-\frac{1}{2}|$，

当且仅当$\begin{cases}(x-\frac{1}{2})(x-a)\leqslant 0\\ x-\frac{1}{2}=0\end{cases}$时取等号，

由 $f(x)\geqslant 5-a$ 恒成立得 $|a-\frac{1}{2}|\geqslant 5-a$，

当 $a\geqslant 5$ 时，不等式恒成立；

当 $a<5$ 时，$(a-\frac{1}{2})^2\geqslant(5-a)^2$，解得$\frac{11}{4}\leqslant a<5$；

综上，实数 a 的取值范围为 $[\frac{11}{4},+\infty)$.