2022年福建省百校高考数学联合测评试卷（4月份）

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.（其中第3、6题包含解题视频，可扫描页眉二维码，点击对应试题进行查看）

1.（5分）已知集合$A=\{x||x-2|\leq 2\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$，则$A\cap B=$( )

A. $\{2,3,4,5\}$　　B. $\{1,2,3,4\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{2,3,4\}$

2.（5分）复数$z=\frac{3+4i}{2-i}$(其中i为虚数单位)在复平面内对应的点在( )

A. 第四象限　　B. 第三象限　　C. 第二象限　　D. 第一象限

3.（5分）已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0))$的焦距为$2\sqrt{5}$，且实轴长为2，则双曲线$C$的渐近线方程为( )

A. $y=\pm\frac{1}{2}x$　　B. $y=\pm 2x$　　C. $y=\pm\sqrt{5}x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$

4.（5分）已知α为锐角，且$sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=sin(\alpha-\frac{\pi}{6})$，则$tan\alpha=$( )

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. $2+\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}+\sqrt{3}$

5.（5分）共有5名同学参加演比赛，在安排出场顺序时，甲、乙排在一起，且丙与甲、乙都不相邻的概率为( )

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{2}{5}$

6.（5分）已知某圆台的高为$\sqrt{7}$，上底面半径为$\sqrt{2}$，下底面半径为$2\sqrt{2}$，则其侧面展开图的面积为( )

A. 9π　　B. $6\sqrt{2}\pi$　　C. $8\sqrt{2}\pi$　　D. $9\sqrt{2}\pi$

7.（5分）已知$a=e^{sin1}+\frac{1}{e^{sin1}}$，$b=e^{tan2}+\frac{1}{e^{tan2}}$，$c=e^{cos3}+\frac{1}{e^{cos3}}$，则( )

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

8.（5分）在平面直角坐标系xOy中，点A在x轴上，点B在y轴上，$|AB|=2$，点C满足$AC\perp BC$，则点C到点$P(\sqrt{3},1)$的距离的最大值为( )

A. 3　　B. $\frac{7}{2}$　　C. 4　　D. 5

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

1.（5分）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=\frac{a_1^2n^2+n}{2}$，公差为d，则( )

A. $a_1=1$　　B. $d=1$　　C. $2S_n\text{-}a_n=1+3+5+\cdots+(2n\text{-}1)$　　D. $S_{2n}=2a_n^2+2a_n$

2. (5分) 在某独立重复实验中，事件A，B相互胜立，且在一次实验中，事件A发生的概率为p，事件B发生的概率为1-p，其中$p\in(0，1)$．若进行x次实验，记事件A发生的次数为X，事件B发生的次数为Y，事件AB发生的次数为Z，则下列说法正确的是( )

A. $E(X)=E(Y)$　　B. $D(X)=D(Y)$　　C. $E(Z)=D(X)$　　D. $n\cdot D(X)=D(X)\bullet D(Y)$

3. (5分) 已知三棱锥$P\text{-}ABC$外接球的球心为O，外接球的半径为4，$AB=AC=4$，$PB=PC$，$BC=m$(m为正数)，则下列命题是真命题的是( )

A. 若$m=4\sqrt{2}$，则三棱锥$P\text{-}ABC$的体积的最大值为$\frac{32+16\sqrt{2}}{3}$

B. 若P，O，A不共线，则平面$POA\perp$平面ABC

C. 存在唯一点P，使得$OP\perp$平面ABC

D. m的最大值为$4\sqrt{2}$

4. (5分) 已知函数$f(x)=sin(\omega x+\varphi)$，其中$\omega>0$．对于任意的$\varphi\in(\frac{\pi}{6}，\frac{\pi}{2})$，函数$f(x)$在区间$(\frac{\pi}{12}，\frac{\pi}{4})$上至少能取到两次最大值，则下列说法正确的是( )

A. 函数$f(x)$的最小正周期小于$\frac{\pi}{6}$　　B. 函数$f(x)$在$(0，\frac{\pi}{12})$内不一定取到最大值　　C. $12<\omega\leq\frac{52}{3}$

D. 函数$f(x)$在$(0，\frac{\pi}{12})$内一定会取到最小值

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

1. (5分) 已知向$\overrightarrow{a}=(k，2k)(k>0)$，$\overrightarrow{b}=(3，4)$，若$(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp(\overrightarrow{a}\text{-}\overrightarrow{b})$，则实数$k=$ ______ .

2. (5分) 已知奇函数$f(x)$在$[0，1]$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减，且$f(x)$有且仅有一个零点，则$f(x)$的函数解析式可以是$f(x)=$ ________________ .

3. (5分) 已知抛物线$y^2=2p_1x(p_1>0)$与抛物线$x^2=2p_2y(p_2>0)$在第一象限内的交点为$P(x_0，y_0)$，若点P在圆C：$(x-\sqrt{10})^2+(y-\sqrt{10})^2=8$上，且直线$OP$与圆$C$相切，则$p_1p_2=$ ______ .

4. (5分) 在处理多元不等式的最值时，我们常用构造切线的方法来求解．例如：曲线$y=x^2$在$x=1$处的切线方程为$y=2x\text{-}1$，且$x^2\geq 2x\text{-}1$，若已知$m+n+t=3$，则$m^2+n^2+t^2\geq 2m\text{-}1+2n\text{-}1+2t\text{-}1=3$，取等条件为$m=n=t=1$，所以$m^2+n^2+t^2$的最小值为3．已知函数$f(x)=x^3\text{-}6x^2+12x$，若数列$\{a_n\}$满足$a_n\leq 2$，且$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=10$，则数列$\{f(a_n)\}$的前10项和的最大值为 ______ ；若数列$\{b_n\}$满足$b_n\geq 0$，且$b_1+b_2+\cdots+b_{100}=180$，则数列$\{f(b_n)\}$的前100项和的最小值为 ______ .

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.（其中第1、2、3、5题包含解题视频，可扫描页眉二维码，点击对应试题进行查看）

1.（10分）在△ABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，已知b^2-$2bccosA$=a^2-$2accosB$，c=2．

(1)证明：△ABC为等腰三角形；

(2)设△ABC的面积为S，若_______，求S的值．

在①$7cosB=2cosC$；②$\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CB}=2S$；③$a^2+b^2=8c^2$三个选项中，选择一个填入上面空白处，并求解．

2.（12分）设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_n+S_{n+1}=3a_{n+1}-2$，且$a_1=1$．

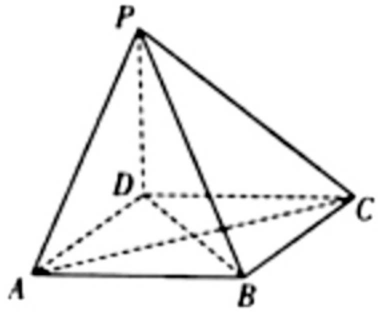
(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)已知数列$\{c_n\}$是等差数列，且$c_1=a_1$，$c_3=S_2$，设$b_n=a_n \bullet c_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n．

3.（12分）如图，在四棱锥$P\text{-}ABCD$中，四边形$ABCD$是菱形$\angle BAD=\angle BPD=60°$，$PB=PD=2$．

(1)证明：平面$PAC\perp$平面$ABCD$；

(2)若二面角$P\text{-}BD\text{-}A$的余弦值为$\frac{1}{3}$，求二面角$B\text{-}PA\text{-}D$的正弦值．



4.（12分）在某次数学考试中，共有四道填空题，每道题5分，已知某同学在此次考试中，在前两道题中，每道题答对的概率均为$\frac{5}{6}$，答错的概率均为$\frac{1}{6}$；对于第三道题，答对和答错的概率均为$\frac{1}{2}$；对于最后一道题，答对的概率为$\frac{1}{3}$，答错的概率为$\frac{2}{3}$．

(1)求该同学在本次考试中填空题部分得分不低于15分的概率；

(2)设该同学在本次考试中，填空题部分的总得分为X，求X的分布列．

5.（12分）在平面直角坐标系xOy中，已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左，右焦点为$F_1$，$F_2$，离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$．过点$P(2，0)$作直线$l$与椭圆$C$相交于$A$，$B$两点．若$A$是椭圆$C$的短轴端点时，$\overrightarrow{AF_2}\bullet\overrightarrow{AP}=3$．

(1)求椭圆C的标准方程；

(2)试判断是否存在直线l，使得$|F_1A|^2$，$\frac{1}{2}|F_1P|^2$，$|F_1B|^2$成等差数列？若存在，求出直线l的方程；若不存在，说明理由．

6.（12分）已知函数$f(x)=\frac{lnx+a}{x}(a\in R)$．

(1)当$a=1$时，求函数$f(x)$的极值；

(2)若曲线$y=f(x)-x$有x_1，$x_2(x_1<x_2)$两个零点．

(i)求a的取值范围；

(ii)证明：存在一组m，$n(n>m>0)$，使得$f(x)$的定义域和值域均为$[m，n]$．

2022年福建省百校高考数学联合测评试卷（4月份）（答案）

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.（其中第3、6题包含解题视频，可扫描页眉二维码，点击对应试题进行查看）

1. 解：因为$|x\text{-}2|\le 2$的解为$[0，4]$，所以$A=[0，4]$，

所以$A\cap B=\{1，2，3，4\}$．

故选：B．

2. 解：$\because z=\frac{(3+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{2+11i}{5}$，

$\therefore$复数z对应的点的坐标为$(\frac{2}{5}，\frac{11}{5})$，在第一象限．

故选：D．

3. 解：由焦距$2\sqrt{5}$可知$c=\sqrt{5}$，再由实轴长2可知$a=1$，所以$b^2=c^2\text{-}a^2=5\text{-}1=4$，即$b=2$，

所以焦点在x轴上的双曲线的渐近线的方程为$y=\pm\frac{b}{a}x=\pm 2x$，

故选：B．

4. 解：$\because\alpha$为锐角，且$sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=sin(\alpha-\frac{\pi}{6})$，即 $\frac{1}{2}sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}sin\alpha\text{-}\frac{1}{2}cos\alpha$，即 $\frac{\sqrt{3}+1}{2}cos\alpha=\frac{\sqrt{3}-1}{2}sin\alpha$，

则$tan\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+2$，

故选：C．

5. 解：5人参加比赛出场顺序总的方法有：$A_5^5=120$种；

将甲乙捆绑，丙进行插空，总的方法有：$A_3^3A_2^2C_2^1=24$种，

故甲、乙排在一起，且丙与甲、乙都不相邻的概率$p=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$，

故选：B．

6. 解：易知母线长为$\sqrt{(\sqrt{7})^2+(2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=3$，且上底面圆周为$2\sqrt{2}\pi$，下底面圆周为$4\sqrt{2}\pi$，

易知展开图为圆环的一部分，圆环所在的小圆半径为3，则大圆半径为6，

所以面积$S=\frac{1}{2}\times 6\times 4\sqrt{2}\pi-\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{2}\pi=9\sqrt{2}\pi$．

故选：D．

7. 解：令$f(x)=e^x+e^{-x}$，

则$f(-x)=e^x+e^{-x}=f(x)$，

故$f(x)$为偶函数，

$f'(x)=e^x-e^{-x}$，

当$x\in(0，+\infty)$时，$f'(x)=e^x-e^{-x}>0$，

故$f(x)$在$(0，+\infty)$上是增函数，

而$a=e^{sin1}+\frac{1}{e^{sin1}}=f(sin1)$，

$b=e^{tan2}+\frac{1}{e^{tan2}}=f(tan2)=f(tan(\pi-2))$，

$c=e^{cos3}+\frac{1}{e^{cos3}}=f(cos3)=f(cos(\pi-3))=f(sin(3-\frac{\pi}{2}))$，

$\because 0<sin1<sin(3-\frac{\pi}{2})<1<tan(\pi-2)$，

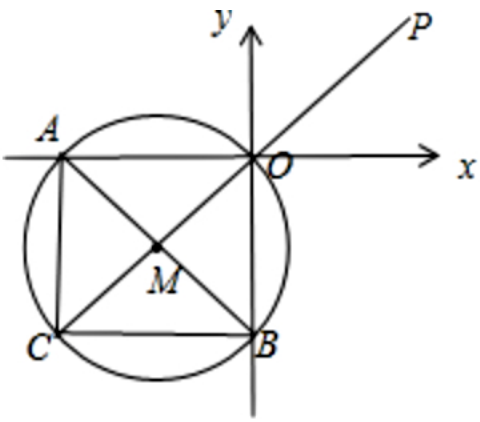
$\therefore f(sin1)<f(sin(3-\frac{\pi}{2}))<f(tan(\pi-2))$，

即$b>c>a$，

故选：C.

8.

解：如图所示，



因为点A在x轴上，点B在y轴上，$|AB|=2$，点C满足$AC\perp BC$，

所以点C在以AB为直径的圆上，

设AB的中点为$M(a，b)$，则$|OM|=|AM|=|BM|=1$，

所以$a^2+b^2=1$，

所以$|MP|\leq|OP|+1=\sqrt{3+1}+1=3$，

所以$|CP|\leq|MP|+1\leq3+1=4$，

即点C到点P的距离的最大值为4.

故选：C.

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

1. 解：因为等差数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=\frac{a_1^2n^2+n}{2}$，

所以$a_1=\frac{1}{2}(a_1{}^2+1)$，

解得$a_1=1$，A正确；

所以$S_n=\frac{n^2+n}{2}$，$1+a_2=3$，

所以$a_2=2$，$d=1$，B正确；

所以$a_n=1+n-1=n$，

$2S_n-a_n=n^2+n-n=n^2$，$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{1+2n-1}{2}\times n=n^2$，$C$正确；

$S_{2n}=n(2n+1)$，$2a_n{}^2+2a_n=2n^2+2n$，D错误．

故选：ABC．

2. 解：因为$E(X)=np$，$E(Y)=n(1-p)$，即A错误；

因为$D(X)=np(1-p)$，$D(Y)=n(1-p)p$，即B正确；

因为A，B独立，所以$P(AB)=p(1-p)$，所以$E(Z)=np(1-p)=D(X)$，即C正确；

因为$n\cdot D(Z)=n^2p(1-p)[1-p(1-p)]$，$D(X)\cdot D(Y)=n^2p^2(1-p)^2$，即$D$错误．

故选：BC．

3. 解：对于A，若$m=4\sqrt{2}$，则$AB^2+AC^2=BC^2$，$\therefore AB\perp AC$，

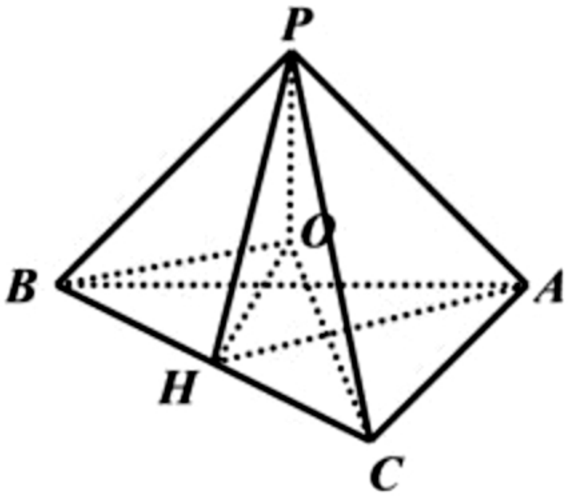
则$\triangle ABC$外接圆的半径$r=2\sqrt{2}$，$\therefore$球心O到平面ABC的距离$d=\sqrt{4^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore$三棱锥高的最大值为$4+2\sqrt{2}$，

$\therefore$体积的最大值为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times4^2\times(4+2\sqrt{2})=\frac{32+16\sqrt{2}}{3}$，$A$正确；

对于B，设BC的中点为H，连接OB，OC，OH，PH，AH，

则$PH\perp BC$，$AH\perp BC$，$OH\perp BC$，



又$PH\cap AH=H$，$PH\cap OH=H$，PH，$AH\subset$平面PHA，PH，$OH\subset$平面PHO，

$\therefore BC\perp$平面PHA，$BC\perp$平面PHO，又平面$PHA\cap$平面$PHO=PH$，

$\therefore P$，O，H，A四点共面，$\therefore BC\perp$平面POA，又$BC\subset$平面ABC，

$\therefore$平面$POA\perp$平面ABC，B正确；

对于C，设直线OP与球的另一交点为P_0，若$OP\perp$平面ABC，则$OP_0\perp$平面ABC，C错误；

对于D，当m最大时，O，A，B，C四点共面，

$\because OB=OC=AB=AC=OA=4$，$\therefore\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore BC=m=4\sqrt{3}$，$D$错误．

故选：AB．

4. 解：由题意可知，$T < \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$，即$A$正确；

因为$T = \frac{2\pi}{\omega} < \frac{\pi}{6}$，所以$\omega > 12$，

则当$x \in (0，\frac{\pi}{12})$时，$\omega x + \varphi \in (\varphi，\frac{\pi}{12}\omega + \varphi)$，

又$\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{12}\omega + \varphi > \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$，

所以函数$f(x)$在$(0，\frac{\pi}{12})$上一定有最大值点，即B错误；

由题意可知，任意$\varphi \in (\frac{\pi}{6}，\frac{\pi}{2})$，总存在$k \in Z$，使得：

$\begin{cases} \frac{\pi}{4}\omega + \varphi \geq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{12}\omega + \varphi \leq 2k\pi - \frac{3\pi}{2} \end{cases}$，故$\begin{cases} \frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{6} \geq 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{12}\omega + \frac{\pi}{2} \leq 2k\pi - \frac{3\pi}{2} \end{cases}$，

整理得$8k + \frac{4}{3} \leq \omega \leq 24k - 24$，

可得$k \geq 2$，$\omega \geq 8 \times 2 + \frac{4}{3} = \frac{52}{3}$，即$C$错误；

当$x \in (0，\frac{\pi}{12})$时，$\omega x + \varphi \in (\varphi，\frac{\pi}{12}\omega + \varphi)$，

又因为$\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{2}$，$\omega > \frac{52}{3}$，

故$\frac{\pi}{12}\omega + \varphi \geq \frac{\pi}{12} \times \frac{52}{3} + \varphi > \frac{13\pi}{9} + \frac{\pi}{6} = \frac{29}{18}\pi > \frac{3\pi}{2}$，

所以函数$f(x)$在$(0，\frac{\pi}{12})$上一定有最小值点，即D正确．

故选：AD．

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

1. 解：$\because (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \perp (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$，

$\therefore (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) \bullet (\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a}^2 - \overrightarrow{b}^2 = 5k^2 - 25 = 0$，且$k > 0$，

$\therefore k = \sqrt{5}$．

故答案为：$\sqrt{5}$．

2. 解：因为奇函数$f(x)$在$[0，1]$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减，

由奇函数性质可得$f(0)=0$，

又$f(x)$有且仅有一个零点，

则$f(1) > 0$，$x \to +\infty$时，$f(x) > 0$，

故满足条件的$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$(答案不唯一)．

故答案为：$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$(答案不唯一)．

3. 解：∵点P在圆C：$(x-\sqrt{10})^2+(y-\sqrt{10})^2=8$上，
$\therefore {x_0}^2+{y_0}^2-2\sqrt{10}(x_0+y_0)+12=0$，
∵抛物线$y^2=2p_1x(p_1>0)$与抛物线$x^2=2p_2y(p_2>0)$在第一象限内的交点为$P(x_0，y_0)$，
$\therefore {y_0}^2=2p_1x_0$，${x_0}^2=2p_2y_0$，$\therefore x_0y_0=4p_1p_2$，
当OP与圆相切时，$|OP|^2={x_0}^2+{y_0}^2=|OC|^2-8=12$，
$\therefore x_0+y_0=\frac{12}{\sqrt{10}}$，
$\therefore 2x_0y_0=(x_0+y_0)^2-({x_0}^2+{y_0}^2)=\frac{12}{5}$，
$\therefore p_1p_2=\frac{x_0y_0}{4}=\frac{3}{10}$．
故答案为：$\frac{3}{10}$．

4. 解：$f'(x)=3x^2-12x+12$，则$f(1)=7$，$f'(1)=3$，
∴曲线$y=f(x)$在$x=1$处的切线方程为$y=3x+4$，当$x\le 2$时，可知$f(x)\le 3x+4$，
$\therefore f(a_n)\le 3a_n+4$，则$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{10})\le 3(a_1+a_2+\cdots+a_{10})+40=70$，
当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_{10}=1$时，等号成立；
曲线$y=f(x)$在$x=x_0$处的切线为$y=(3{x_0}^2-12x_0+12)(x-x_0)+x_0^3-6{x_0}^2+12x_0$，
∵$b_n\ge 0$，则令此切线过原点，解得$x_0=3$或$x_0=0$，
∴曲线$y=f(x)$在$x=3$处的切线方程为$y=3x$，且$f(x)\ge 3x(x\ge 0)$，
$\therefore f(b_1)+f(b_2)+\cdots+f(b_{100})\ge 3(b_1+b_2+\cdots+b_{100})=540$，当且仅当$b_n=0$或$b_n=3$时，等号成立，
取$b_1=b_2=\cdots=b_{60}=3$，$b_{62}=b_{62}=\cdots=b_{100}=0$，即$\{b_n\}$的前100项中有60项为3，40项为0时，等号成立．
故答案为：70，540．

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.（其中第1、2、3、5题包含解题视频，可扫描页眉二维码，点击对应试题进行查看）

1. 解：(1)证明：因为$b^2-2bc\cos A=a^2-2ac\cos B$，
所以$b^2+c^2-2bc\cos A=a^2+c^2-2ac\cos B$，
由余弦定理可知，$a^2=b^2$，
即$a=b$，
即$\triangle ABC$为等腰三角形；
(2)解：选①，
由(1)可知，$A=B$，所以$C=\pi-2B$，所以$7\cos B=2\cos C=2\cos(\pi-2B)=-2\cos 2B=2-4\cos^2B$，
整理得$4\cos^2B+7\cos B-2=0$，解得$\cos B=\frac{1}{4}$，
所以$\cos C=\frac{7}{2}\cos B=\frac{7}{8}$，
所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\frac{\sqrt{15}}{8}$，
又由$c=2$，$\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$，
由正弦定理可得$a=b=4$，
所以$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 4\times 4\times\frac{\sqrt{15}}{8}=\sqrt{15}$；

选②，

因为$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=2S$，

所以$abcosC=absinC$，

即$tanC=1$，

解得$C=\frac{\pi}{4}$，

所以$4=2a^2-2a^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$a^2=4+2\sqrt{2}$，

则$S=\frac{1}{2}a^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times(4+2\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$；

选③，

因为$a^2+b^2=8c^2$，且$a=b$，$c=2$，

所以$a=b=4$，

所以$cosC=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{16+16-4}{2\times4\times4}=\frac{7}{8}$，

所以$sinC=\sqrt{1-cos^2C}=\frac{\sqrt{15}}{8}$，

所以$S=\frac{1}{2}absinC=\frac{1}{2}\times4\times4\times\frac{\sqrt{15}}{8}=\sqrt{15}$．

2. 解：(1)因为$S_n+S_{n+1}=3a_{n+1}-2$，所以$S_{n-1}+S_n=3a_n-2$，$(n\geq2)$，

两式相减可得：$a_n+a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n(n\geq2)$，整理得：$a_{n+1}=2a_n$，$(n\geq2)$，

$\because n=1$时，$a_1+S_2=3a_2-2$，$\therefore 2a_1+a_2=3a_2-2$，$\therefore 2a_2=4$，$\therefore a_2=2$，

$\therefore a_2=2a_1$，$a_{n+1}=2a_n$，$(n\in N^*)$，

$\therefore$数列$\{a_n\}$是以1为首项，2为公比的等比数列，

$\therefore a_n=2^{n-1}$；

(2)由(1)得：$c_1=1$，$c_3=S_2=a_1+a_2=3$，$\therefore d=\frac{c_3-c_1}{3-1}=1$，

$\therefore c_n=n$，$\therefore b_n=n\bullet2^{n-1}$，

$\therefore T_n=1\times2^0+2\times2^1+\bullet\bullet\bullet+n\bullet2^{n-1}$，

$\therefore 2T_n=0+1\times2^1+2\times2^2+\bullet\bullet\bullet+(n-1)\bullet2^{n-1}+n\bullet2^n$，

两式相减得：$-T_n=1+2^1+2^2+\bullet\bullet\bullet+2^{n-1}-n\bullet2^n=\frac{1-2^n}{1-2}-n\bullet2^n=(1-n)2^n-1$，

$\therefore T_n=(n-1)2^n+1$．

3. 解：(1)证明：设$AC\cap BD=O$，连接PO，

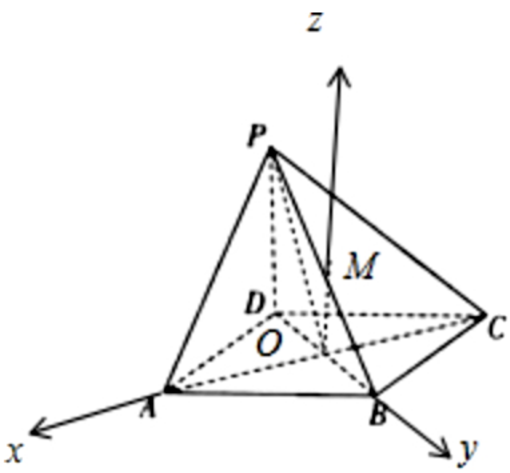
在菱形$ABCDK$，O为BD中点，且$BD\perp AC$，

因为$PB=PD$，所以$BD\perp PO$，

又因为$PO\cap AC=O$，PO，$AC\subset$平面PAC，

所以$BD\perp$平面PAC，

因为$BD\subset$平面$ABCD$，所以平面$PAC\perp$平面$ABCD$；



(2)解：作$OM\perp$平面$ABCD$，以$\left\{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}\right\}$为$x$，$y$，$z$轴，建立空间直角坐标系，

易知$PB=PD=BD=AB=AD=2$，则$OA=OP=\sqrt{3}$，$OB=1$，

因为$OA\perp BD$，$OP\perp BD$，所以$\angle POA$为二面角P-BD-A的平面角，所以$cos\angle POA=\frac{1}{3}$，

则$P(\frac{\sqrt{3}}{3}，0，\frac{2\sqrt{6}}{3})$，$A(\sqrt{3}，0，0)$，$B(0，1，0)$，$D(0，-1，0)$，

所以$\overrightarrow{AD}=(-\sqrt{3}，-1，0)$，$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3}，1，0)$，$\overrightarrow{AP}=(-\frac{2\sqrt{3}}{3}，0，\frac{2\sqrt{6}}{3})$，

设平面PAB的法向量为$\overrightarrow{m}=(x_1，y_1，z_1)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AB}=-\sqrt{3}x_1+y_1=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AP}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x_1+\frac{2\sqrt{6}}{3}z_1=0\end{cases}$，

取z_1=1，则$x_1=\sqrt{2}$，$y_1=\sqrt{6}$，所以$\overrightarrow{m}=(\sqrt{2}，\sqrt{6}，1)$，

设平面PAD的法向量为$\overrightarrow{n}=(x_2，y_2，z_2)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AD}=-\sqrt{3}x_2-y_2=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AP}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x_2+\frac{2\sqrt{6}}{3}z_2=0\end{cases}$，

取z_1=1，则$x_1=\sqrt{2}$，$y_2=-\sqrt{6}$，所以$\overrightarrow{n}=(\sqrt{2}，-\sqrt{6}，1)$，

设二面角B-PA-D为θ，则$|cos\theta|=\frac{|\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=\frac{|2-6+1|}{\sqrt{2+6+1}\cdot\sqrt{2+6+1}}=\frac{1}{3}$，

所以二面角B-PA-D的正弦值为$sin\theta=\sqrt{1-cos^2\theta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$．

4. 解：(1)设得分不低于(15分)为事件A，

则$P(A)=(\frac{5}{6})^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+C_2^1\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+(\frac{5}{6})^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+(\frac{5}{6})^2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{55}{108}$；

(2)易知X的取值可能为0，5，10，15，20，

则$P(X=0)=(\frac{1}{6})^2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{108}$；$P(X=5)=(\frac{1}{6})^2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+(\frac{1}{6})^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+C_2^1\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{23}{216}$，

$P(X=10)=(\frac{1}{6})^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+(\frac{5}{6})^2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+C_2^1\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+C_2^1\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{81}{216}=\frac{3}{8}$，

$P(X=15)=C_2^1\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+(\frac{5}{6})^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+(\frac{5}{6})^2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{85}{216}$，$P(X=20)=(\frac{5}{6})^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{25}{216}$，

则X的分布列为

X	0	5	10	15	20
P	$\frac{1}{108}$	$\frac{23}{216}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{85}{216}$	$\frac{25}{216}$

5. 解：(1)由题意可知，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即$a=\sqrt{2}c$，

当A为椭圆的短轴端点时，不妨设$A(0，b)$，

则$\overrightarrow{AF_2}=(-b，c)$，$\overrightarrow{AP}=(-b，2)$，

所以$\overrightarrow{AF_2}\cdot\overrightarrow{AP}=b^2+2c=3$，

因为$a^2=b^2+c^2=2c^2$，所以$b^2=c^2$，所以$c^2+2c=3$，

解得$c=1$，所以$a=\sqrt{2}$，$b=1$，

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

(2)设l：$y=k(x-2)$，

将直线方程与椭圆C的方程联立得$\begin{cases} y=k(x-2) \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，

消去y，整理得$(2k^2+1)x^2$-$8k^2x$+$8k^2$-2=0，

因为Δ=$64k^4$-4$(2k^2+1)(8k^2$-2)＞0，

解得$k\in(-\frac{\sqrt{2}}{2}，\frac{\sqrt{2}}{2})$，

设$A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则$x_1+x_2=\frac{8k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{8k^2-2}{2k^2+1}$，

所以$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\frac{4(8k^4-2k^2+1)}{(2k^2+1)^2}$，

易知F_1(-1，0)，

所以$|F_1A|^2=(x_1+1)^2+y_1^2=(x_1+1)^2+1-\frac{1}{2}x_1^2=\frac{1}{2}x_1^2+2x_1+2$，

同理$|F_1B|^2=\frac{1}{2}{x_2}^2+2x_2$+2，

所以$|F_1A|^2+|F_1B|^2=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}+2(x_1+x_2)+4=\frac{48k^4+12k^2+2}{(2k^2+1)^2}+4$，

又因为$|F_1P|^2=9$，

所以$\frac{48k^4+12k^2+2}{(2k^2+1)^2}+4=9$，

则得$28k^4$-$8k^2$-3=0，

因为分解为$(2k^2$-1)$(14k^2$+3)=0，

解得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因为$k^2\in[0，\frac{1}{2})$，

所以不存在直线l符合题意．

6. 解：(1)当a=1时，$f(x)=\frac{lnx+1}{x}$，则$f'(x)=\frac{-lnx}{x^2}$，令$f'(x)$=0，解得x=1，

列表可知，

x	(0，1)	1	(1，+∞)
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	单调递增	1	单调递减

$f(x)$的极大值为$f(1)$=1，无极小值；

(2)(i)由题意可知，$\frac{lnx+a}{x}-x=0$有两解，即lnx-x^2+a=0有两解，

设$g(x)$=lnx-x^2+a，则$g'(x)=\frac{1}{x}-2x=\frac{1-2x^2}{x}$，令$g'(x)$=0，解得$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

列表可知，$g(x)_{min}=g(\frac{\sqrt{2}}{2})=-\frac{ln2}{2}-\frac{1}{2}+a$，

因为$g(x)$有两个零点，所以$g(x)_{max}$＞0，解得$a>\frac{ln2}{2}+\frac{1}{2}$，

当0＜x＜e^{-a}时，有lnx+a＜0，可得$g(x)$＜lnx+a＜0，

令$\varphi(x)=lnx-\frac{1}{2}x^2$，有$\varphi'(x)$=$\frac{1}{x}$-$x$=$\frac{1-x^2}{x}$，可得函数$\varphi(x)$的增区间为(1，+∞)，减区间为(0，1)，

有$\varphi(x) \le \varphi(1) = -\frac{1}{2} < 0$，可得$lnx - \frac{1}{2}x^2 < 0$，

当$x > \sqrt{2}a$时，$g(x) = (lnx - \frac{1}{2}x^2) + (a - \frac{1}{2}x^2) < a - \frac{1}{2}x^2 < a - \frac{1}{2} \times 2a = 0$．

所以存在$x_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$，$x_2 > \frac{\sqrt{2}}{2}$，使得$g(x_1)=g(x_2)=0$，所以$a > \frac{ln2}{2} + \frac{1}{2}$；

(ii)证明：因为$f'(x) = \frac{1-a-lnx}{x^2}$，令$f'(x)=0$，解得$x=e^{1-a}$，

列表可知，$f(x)$在$(0，e^{1-a})$上单调递增，在$(e^{1-a}，+\infty)$上单调递减，

①当$x_2 \le e^{1-a}$时，$g(e^{1-a})=1-e^{2-2a} \le g(x_2)=0$，解得$\frac{ln2}{2} + \frac{1}{4} < a \le 1$，

所以$f(x) \le \frac{lnx+1}{x} \le 1$，所以$m < n \le 1 \le e^{1-a}$，即$f(x)$在$[m，n]$上单调递增，

所以$f(m)=m$，$f(n)=n$，即$m=x_1$，$n=x_2$，

所以当$\frac{ln2}{2} + \frac{1}{4} < a \le 1$时，存在一组$m$，$n$符合题意；

②当$a > 1$时，$g(e^{1-a})=1-e^{2-2a} > 0$，所以$x_1 < e^{1-a} < x_2$，所以不存在$n < m \le e^{1-a}$符合题意，

若$n > m \ge e^{1-a}$，则$f(x)$在$[m，n]$上单调递减，

所以$f(m) = \frac{lnm+a}{m} = n$，$f(n) = \frac{lnn+a}{n} = m$，

所以$lnm+a=lnn+a=mn$，即$m=n$，不符题意；

若$m < e^{1-a} < n$，$f(x)$在$[m，e^{1-a})$上单调递增，在$(e^{1-a}，+\infty)$上单调递减，

所以$f(x)_{max} = f(e^{1-a}) = \frac{1}{e^{1-a}} = n$，

又因为$f(n)=e^{1-a}(2a-1) > e^{1-a} > m$，所以$f(x)_{max}=f(m)=m$，

即$m=x_1$，$n = \frac{1}{e^{1-a}}$，所以当$a > 1$时，存在一组m，n符合题意；

综上，存在一组m，n符合题意．