2019-2020学年安徽省皖西南名校高二第二学期期末数学试卷（理科）

一、选择题（共12小题）．

1．设集合$A=\{x|x^2+2x-3<0\}$，$B=\{x|\log_2x<1\}$，则$A\cap B=$（　　）

A．$\{x|0<x<2\}$　　B．$\{x|0<x<1\}$　　C．$\{x|-3<x<1\}$　　D．$\{x|-1<x<2\}$

2．若复数z满足$z(1+2i)=10i$，则$\overline{z}=$（　　）

A．$4-2i$　　B．$4+2i$　　C．$-4-2i$　　D．$-4+2i$

3．$(\frac{1}{x}-2x)^5$的展开式中含x^3项的系数是（　　）

A．40　　B．-40　　C．80　　D．-80

4．已知向量$\overrightarrow{a}=(m,\ 1)$，$\overrightarrow{b}=(2,\ -3)$，若$(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$，则$m=$（　　）

A．$-\frac{19}{4}$　　B．$\frac{19}{4}$　　C．$-\frac{2}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

5．某中学有高中生3600人，初中生2400人为了解学生课外锻炼情况，用分层抽样的方法从该校学生中抽取一个容量为n的样本．已知从高中生中抽取的人数比从初中生中抽取的人数多24，则$n=$（　　）

A．48　　B．72　　C．60　　D．120

6．已知$\sin(\theta-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{5}$，则$\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})=$（　　）

A．$-\frac{2}{25}$　　B．$-\frac{23}{25}$　　C．$\frac{2}{25}$　　D．$\frac{23}{25}$

7．已知l，m，n为不同的直线，α，β，γ为不同的平面，则下列判断错误的是（　　）

A．若$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$\alpha\parallel\beta$，则$m\parallel n$

B．若$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$m\parallel n$，则$\alpha\parallel\beta$

C．若$\alpha\cap\beta=l$，$\beta\cap\gamma=m$，$\gamma\cap\alpha=n$，$l\parallel\gamma$，则$m\parallel n$

D．若$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则$\alpha\parallel\beta$

8．在△ABC中，角A，B，C所对的边分别是a，b，c，若$bc\cos A=\frac{8}{3}S_{\triangle ABC}$，则$\frac{2\cos^2\frac{B+C}{2}+\sin A-1}{2\sin A-\cos A}=$（　　）

A．-2　　B．2　　C．$-\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

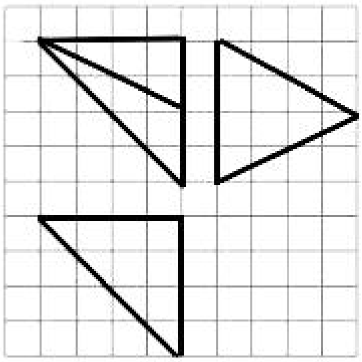
9．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_a x+a, & x>1\\ (4-a)x+2, & x\leqslant 1\end{cases}$ 是 R 上的单调递增函数，则 a 的取值范围是（　　）

A．（1，4）　　B．[2，4）　　C．（1，3]　　D．[3，4）

10．已知抛物线 C: $x=4y^2$ 的焦点为 F，若斜率为 $\frac{1}{8}$ 的直线 l 过点 F，且与抛物线 C 交于 A，B 两点，则线段 AB 的中点到准线的距离为（　　）

A．$\frac{65}{8}$　　B．$\frac{65}{4}$　　C．$\frac{129}{16}$　　D．$\frac{129}{8}$

11．如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，则该几何体外接球的表面积是（　　）



A．41π　　B．$\frac{41}{4}\pi$　　C．25π　　D．$\frac{25}{4}\pi$

12．已知函数 $f(x)=\sin x$ 的图象与直线 $kx-y-k\pi=0$（$k>0$）恰有三个公共点，这三个点的横坐标从小到大分别为 x_1，x_2，x_3，则 $\frac{\tan(x_3-x_2)}{x_1+x_2+x_3}$ 属于（　　）

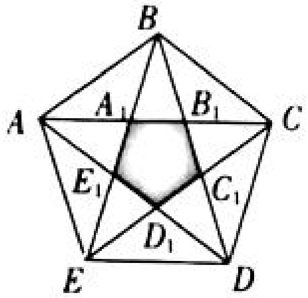
A．（0，$\frac{1}{3}$）　　B．（$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$）　　C．（$\frac{1}{2}$，1）　　D．（1，$\frac{3}{2}$）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．把答案填在答题卡中的横线上．

13．函数 $f(x)=3\tan(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象的对称中心是_______．

14．已知函数 $f(x)$ 是偶函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\log_3(x+1)+x^2$，则 $f(-2)=$_______．

15．黄金三角形有两种，一种是顶角为 36° 的等腰三角形，另一种是顶角为 108° 的等腰三角形．例如，一个正五边形可以看成是由正五角星和五个顶角为 108° 的黄金三角形组成的，如图所示，在黄金三角形 A_1AB 中，$\frac{A_1A}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．根据这些信息，若在正五边形 $ABCDE$ 内任取一点，则该点取自正五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 内的概率是_______．



16．已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的左、右焦点分别是 F_1，F_2，直线 l：$y=3x+6$ 过点 F_1，且与双曲线 C 在第二象限交于点 P，若点 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上，则双曲线 C 的离心率为________.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=2$，$2S_n=(n+1)a_n(n\in N^*)$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=\frac{4}{(a_n+2)(a_{n+1}+2)}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

18．某航空公司规定：国内航班（不构成国际运输的国内航段）托运行李每件重量上限为 50kg，每件尺寸限制为 40cm×60cm×100cm，其中头等舱乘客免费行李额为 40kg，经济舱乘客免费行李额为 20kg．某调研小组随机抽取了 100 位国内航班旅客进行调查，得到如表数据；

携带行李重量（kg）	[0，20]	（20，30]	（30，40]	（40，50]
头等舱乘客人数	8	33	12	2
经济舱乘客人数	37	5	3	0
合计	45	38	15	2

（1）请完成答题卡上的 2×2 列联表，并判断是否在犯错概率不超过 0.05 的前提下，认为托运超额行李与乘客乘坐座位的等级有关？

（2）调研小组为感谢参与调查的旅客，决定从托运行李超出免费行李额且不超出 10kg 的旅客中（其中女性旅客 4 人）随机抽取 4 人，对其中的女性旅客赠送"100 元超额行李补助券"，记赠送的补助券总金额为 X 元，求 X 的分布列与数学期望．

参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据

P（$K^2 \geqslant k_0$）	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

19．图 1 是由平行四边形 $ABCD$ 和 $Rt\triangle ABE$ 组成的一个平面图形．其中 $\angle BAD=60°$，$AB\perp AE$，$AD=AE=2AB=2$，将 $\triangle ABE$ 沿 AB 折起到 $\triangle ABP$ 的位置，使得 $PC=\sqrt{11}$，如图 2．

（1）证明：$PA\perp BD$；

（2）求二面角 $A-PD-B$ 的余弦值．

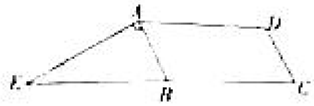


图1

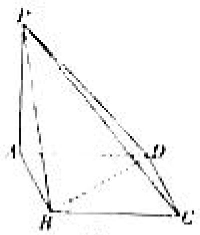


图2

20．已知函数 $f(x)=-\frac{1}{6}x^3-x^2+mx+3$ 在 $x=0$ 处取得极值．

（1）求 m 的值；

（2）若过点（2，t）可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线，求 t 的取值范围．

21．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，左、右焦点分别为 F_1，F_2，且 F_2 到直线 l：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 的距离为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$．

（1）求椭圆 C 的方程．

（2）过 F_1 的直线 m 交椭圆 C 于 P，Q 两点，O 为坐标原点，以 OP，OQ 为邻边作平行四边形 $OPDQ$，是否存在直线 m，使得点 D 在椭圆 C 上？若存在，求出直线 m 的方程；若不存在，说明理由．

22．已知函数 $f(x)=lnx-ax+1$ 有两个零点．

（1）求 a 的取值范围；

（2）设 x_1，x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，证明：$f'(x_1\cdot x_2)<1-a$．

参考答案

一、选择题（共12小题）.

1．设集合 $A=\{x|x^2+2x-3<0\}$，$B=\{x|\log_2x<1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A．$\{x|0<x<2\}$　　B．$\{x|0<x<1\}$　　C．$\{x|-3<x<1\}$　　D．$\{x|-1<x<2\}$

【分析】求出集合 A，B，由此能求出 $A\cap B$.

解：∵集合 $A=\{x|x^2+2x-3<0\}=\{x|-3<x<1\}$，

$B=\{x|\log_2x<1\}=\{x|0<x<2\}$，

∴$A\cap B=\{x|0<x<1\}$.

故选：B.

2．若复数 z 满足 $z(1+2i)=10i$，则 $\overline{z}=$（　　）

A．$4-2i$　　B．$4+2i$　　C．$-4-2i$　　D．$-4+2i$

【分析】把已知等式变形，再由复数代数形式的乘除运算化简得答案.

解：由 $z(1+2i)=10i$，

得 $z=\frac{10i}{1+2i}=\frac{10i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=2i(1-2i)=4+2i$，

∴$\overline{z}=4-2i$.

故选：A.

3．$(\frac{1}{x}-2x)^5$ 的展开式中含 x^3 项的系数是（　　）

A．40　　B．-40　　C．80　　D．-80

【分析】先求出二项式展开式的通项公式，再令 x 的幂指数等于3，求得 r 的值，即可求得展开式中的含 x^3 的项的系数.

解：二项式 $(\frac{1}{x}-2x)^5$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r\bullet(-2)^r\bullet x^{2r-5}$，

令 $2r-5=3$，求得 $r=4$，

∴展开式中含 x^3 的项的系数是 $C_5^4\bullet(-2)^4=80$，

故选：C.

4．已知向量 $\overrightarrow{a}=(m,\ 1)$，$\overrightarrow{b}=(2,\ -3)$，若 $(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$，则 $m=$（　　）

A．$-\frac{19}{4}$　　B．$\frac{19}{4}$　　C．$-\frac{2}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

【分析】可求出$2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(2m-2,\ 5)$，然后根据$(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$即可得出$(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=0$，然后进行向量坐标的数量积运算即可求出$m$的值．

解：$2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(2m-2,\ 5)$，$\overrightarrow{b}=(2,\ -3)$，且$(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{b}$，

∴$(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=2(2m-2)-15=0$，解得$m=\frac{19}{4}$．

故选：B．

5．某中学有高中生3600人，初中生2400人为了解学生课外锻炼情况，用分层抽样的方法从该校学生中抽取一个容量为n的样本．已知从高中生中抽取的人数比从初中生中抽取的人数多24，则n＝（　　）

A．48　　B．72　　C．60　　D．120

【分析】根据分层抽样的基本知识建立比例关系并解方程即可．

解：高中人数$\frac{3600}{3600+2400}n=\frac{3}{5}n$

初中人数$\frac{2400}{3600+2400}n=\frac{2}{5}n$

∴$\frac{3}{5}n-\frac{2}{5}n=\frac{1}{5}n=24$

∴$n=120$

故选：D．

6．已知$\sin(\theta-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{5}$，则$\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})$＝（　　）

A．$-\frac{2}{25}$　　B．$-\frac{23}{25}$　　C．$\frac{2}{25}$　　D．$\frac{23}{25}$

【分析】由已知利用诱导公式，二倍角的余弦函数公式化简所求即可计算得解．

解：∵$\sin(\theta-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{5}$，

∴$\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})=\cos[\frac{\pi}{2}-(2\theta-\frac{\pi}{6})]=\cos(2\theta-\frac{2\pi}{3})=1-2\sin^2(\theta-\frac{\pi}{3})=1-2\times\frac{1}{25}=\frac{23}{25}$．

故选：D．

7．已知l，m，n为不同的直线，α，β，γ为不同的平面，则下列判断错误的是（　　）

A．若$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$\alpha\parallel\beta$，则$m\parallel n$

B．若$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$m\parallel n$，则$\alpha\parallel\beta$

C．若$\alpha\cap\beta=l$，$\beta\cap\gamma=m$，$\gamma\cap\alpha=n$，$l/\!/\gamma$，则 $m/\!/n$

D．若$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则$\alpha/\!/\beta$

【分析】对于 *A*，由线面垂直的性质定理和面面平行的性质得 $m/\!/n$；对于 *B*，由线线平行的性质、面面平行的判定定理得$\alpha/\!/\beta$；对于 *C*，由线线平行的判定定理得 $m/\!/n$；对于 *D*，α与β相交或平行．

解：由 l，m，n 为不同的直线，α，β，γ为不同的平面，知：

对于 *A*，若 $m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$\alpha/\!/\beta$，则由线面垂直的性质定理和面面平行的性质得 $m/\!/n$，故 *A* 正确；

对于 *B*，若 $m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$m/\!/n$，则由线线平行的性质、面面平行的判定定理得$\alpha/\!/\beta$，故 *B* 正确；

对于 *C*，若$\alpha\cap\beta=l$，$\beta\cap\gamma=m$，$\gamma\cap\alpha=n$，$l/\!/\gamma$，则由线线平行的判定定理得 $m/\!/n$，故 *C* 正确；

对于 *D*，若$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\gamma$，则α与β相交或平行，故 *D* 错误．

故选：*D*．

8．在$\triangle ABC$中，角 *A*，*B*，*C* 所对的边分别是 *a*，*b*，*c*，若 $bc\cos A=\frac{8}{3}S_{\triangle ABC}$，则 $\frac{2\cos^2\frac{B+C}{2}+\sin A-1}{2\sin A-\cos A}=$（　　）

A．-2　　　　B．2　　　　C．$-\frac{1}{2}$　　　　D．$\frac{1}{2}$

【分析】由已知利用三角形的面积公式，同角三角函数基本关系式可求 $\tan A$ 的值，进而根据三角函数恒等变换的应用化简所求即可计算得解．

解：$\because bc\cos A=\frac{8}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}\times bc\sin A$，可得 $bc\cos A=\frac{4}{3}bc\sin A$，

$\therefore \tan A=\frac{3}{4}$，

$$\therefore \frac{2\cos^2\frac{B+C}{2}+\sin A-1}{2\sin A-\cos A}=\frac{\cos(B+C)+\sin A}{2\sin A-\cos A}=\frac{\sin A-\cos A}{2\sin A-\cos A}=\frac{\tan A-1}{2\tan A-1}=\frac{\frac{3}{4}-1}{2\times\frac{3}{4}-1}=-\frac{1}{2}.$$

故选：*C*．

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_a x+a, & x>1\\(4-a)x+2, & x\leqslant 1\end{cases}$ 是 R 上的单调递增函数，则 a 的取值范围是（　　）

A. （1，4）　　B. [2，4）　　C. （1，3]　　D. [3，4）

【分析】根据题意，由函数单调性的定义可得 $\begin{cases}a>1\\4-a>0\\a\geqslant 4-a+2\end{cases}$，解可得 a 的取值范围，即可得答案.

解：根据题意，函数 $f(x)=\begin{cases}\log_a x+a, & x>1\\(4-a)x+2, & x\leqslant 1\end{cases}$ 是 R 上的单调递增函数，

必有 $\begin{cases}a>1\\4-a>0\\a\geqslant 4-a+2\end{cases}$，解可得 $3\leqslant a<4$，

即 a 的取值范围为[3，4）；

故选：D.

10. 已知抛物线 C：$x=4y^2$ 的焦点为 F，若斜率为 $\frac{1}{8}$ 的直线 l 过点 F，且与抛物线 C 交于 A，B 两点，则线段 AB 的中点到准线的距离为（　　）

A. $\frac{65}{8}$　　B. $\frac{65}{4}$　　C. $\frac{129}{16}$　　D. $\frac{129}{8}$

【分析】求出抛物线的准线方程，然后求解准线方程，求出线段 AB 的中点的横坐标，然后求解即可.

解：抛物线 C：$x=4y^2$，可得准线方程为：$x=-\frac{1}{16}$，过点 F（$\frac{1}{16}$，0）且斜率 $\frac{1}{8}$ 的直线 l：$y=\frac{1}{8}(x-\frac{1}{16})$，

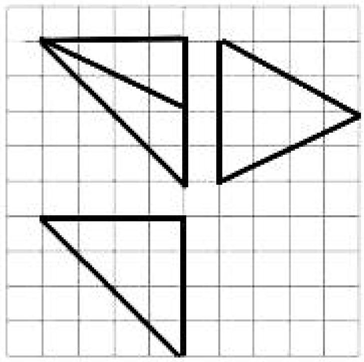
由题意可得：$\begin{cases}x=4y^2\\y=\frac{1}{8}(x-\frac{1}{16})\end{cases}$，可得 $x^2-\frac{129}{8}x+\frac{1}{256}=0$，

直线 l 与抛物线 C 相交于 A、B 两点，则线段 AB 的中点的横坐标为：$\frac{129}{16}$，

则线段 AB 的中点到抛物线 C 的准线的距离为：$\frac{129}{16}+\frac{1}{16}=\frac{65}{8}$.

故选：A.

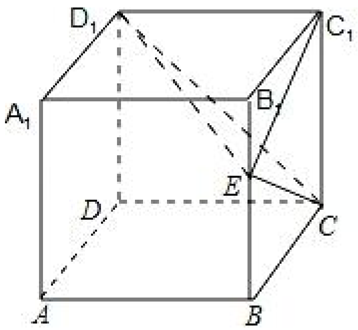
11. 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗实线画出的是某几何体的三视图，则该几何体外接球的表面积是（　　）



A．41π　　B．$\frac{41}{4}\pi$　　C．25π　　D．$\frac{25}{4}\pi$

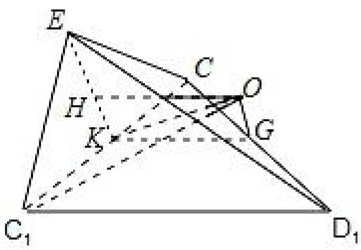
【分析】由三视图得到直观图，然后把所得几何体改变位置放置，找出其外接球的球心，求出三角形的半径，代入球的表面积公式得答案．

解：由三视图得到直观图，如图，



该几何体为三棱锥 D_1-CC_1E，正方体的棱长为 4，E 为 BB_1 的中点，

取出该几何体如图，



三棱锥 $E-C_1D_1C$，底面三角形 C_1D_1C 为等腰直角三角形，直角边长为 4，

侧面 EC_1C⊥底面 C_1D_1C，$EC_1=EC=2\sqrt{5}$．

则底面三角形的外心为 CD_1 的中点 G，设△EC_1C 的外心为 H，

分别过 G 与 H 作底面 C_1D_1C 与侧面 EC_1C 的垂线相交于 O，

则 O 为三棱锥 $E-C_1D_1C$ 的外接球的球心，

在△EC_1C 中，求得 $CK=4$，$\sin\angle ECK=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$，

则 $2EH=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=5$，即 $EH=\frac{5}{2}$，

则 $HK=\frac{3}{2}$，$OK^2=(\frac{3}{2})^2+2^2=\frac{25}{4}$，则 $OC_1{}^2=\frac{25}{4}+4=\frac{41}{4}$.

∴该几何体外接球的表面积是 $4\pi\times\frac{41}{4}=41\pi$.

故选：*A*.

12．已知函数 $f(x)=\sin x$ 的图象与直线 $kx-y-k\pi=0$（$k>0$）恰有三个公共点，这三个点的横坐标从小到大分别为 x_1，x_2，x_3，则 $\frac{\tan(x_3-x_2)}{x_1+x_2+x_3}$ 属于（　　）

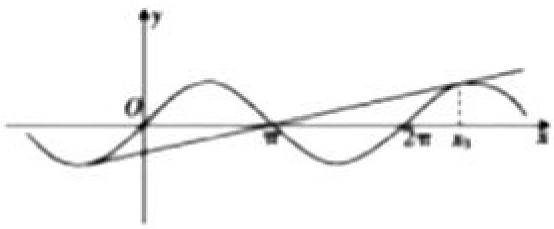
A．（0，$\frac{1}{3}$）　　B．（$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$）　　C．（$\frac{1}{2}$，1）　　D．（1，$\frac{3}{2}$）

【分析】画出函数 $f(x)=\sin x$ 的图象，直线 $kx-y-k\pi=0$（$k>0$）的图象，利用数形结合，推出 $x_1+x_3=2x_2=2\pi$，$x_3\in(2\pi,\frac{5\pi}{2})$，转化求解所求表达式的范围即可．

解：函数 $f(x)=\sin x$ 的图象关于（π，0）对称，直线 $kx-y-k\pi=0$ 过（π，0），作出函数 $y=\sin x$ 的图象，与直线 $kx-y-k\pi=0$（$k>0$）的图象，恰有三个公共点，

由图象可知 $x_1+x_3=2x_2=2\pi$，并且 $x_3\in(2\pi,\frac{5\pi}{2})$，由 $f'(x)=\cos x$，$x\in(2\pi,\frac{5\pi}{2})$，

所以 $\cos x_3=\frac{\sin x_3}{x_3-\pi}$，即 $x_3=\pi+\tan x_3$，所以 $\frac{\tan(x_3-x_2)}{x_1+x_2+x_3}=\frac{\tan x_3}{3\pi}=\frac{x_3-\pi}{3\pi}\in(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$．



故选：*B*.

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．把答案填在答题卡中的横线上．

13．函数 $f(x)=3\tan(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象的对称中心是__（$\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$，0），$k\in Z$__．

【分析】由题意利用正切函数的图象的对称性，得出结论．

解：对于函数 $f(x)=3\tan(2x+\frac{\pi}{3})$，令 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}$，求得 $x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$，

故函数的图象的对称中心是（$\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$，0），$k\in Z$，

故答案为：$(\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6}, 0)$，$k\in Z$.

14．已知函数 $f(x)$ 是偶函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\log_3(x+1)+x^2$，则 $f(-2)=$__5__.

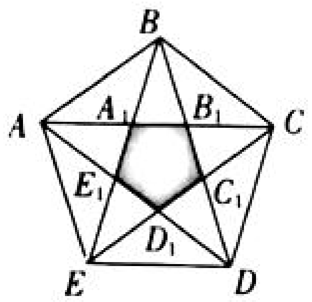
【分析】根据题意，由函数的解析式可得 $f(2)$ 的值，结合函数的解析式分析可得答案.

解：根据题意，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\log_3(x+1)+x^2$，则 $f(2)=\log_3 3+2^2=5$，

又由 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(-2)=f(2)=5$；

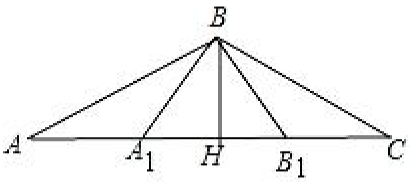
故答案为：5

15．黄金三角形有两种，一种是顶角为 36° 的等腰三角形，另一种是顶角为 108° 的等腰三角形．例如，一个正五边形可以看成是由正五角星和五个顶角为 108° 的黄金三角形组成的，如图所示，在黄金三角形 A_1AB 中，$\frac{A_1A}{AB}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$．根据这些信息，若在正五边形 $ABCDE$ 内任取一点，则该点取自正五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 内的概率是__$\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$__.



【分析】根据多边形相似，求出满足条件的概率即可.

解：如图示：



，

在△ABC 中，过点 B 作 $BH\perp AC$，垂足为 H，设 $AB=2$，

由题意知 $AA_1=A_1B=\sqrt{5}-1$，$\angle A_1AB=36°$，

在△A_1AB 中，由余弦定理得：

$$\cos\angle A_1AB=\frac{AB^2+AA_1{}^2-(A_1B)^2}{2AB\cdot AA_1}=\frac{2^2+(\sqrt{5}-1)^2-(\sqrt{5}-1)^2}{2\times 2\times(\sqrt{5}-1)}=\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

在 RT△ABH 中，得：

$$\cos\angle A_1AB=\frac{AH}{AB}=\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

$\therefore AH=AB\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{4}=2\times\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$,

$\therefore A_1H=AH-AA_1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-（\sqrt{5}-1）=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$,

$\therefore A_1B_1=2A_1H=3-\sqrt{5}$,

正五边形 $ABCDE$ 与正五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 的面积分别记作 $S1$，$S2$,

∵正五边形 $ABCDE$ 与正五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 相似,

$\therefore\frac{S_2}{S_1}=(\frac{A_1B_1}{AB})^2=(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^2=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$,

若在正五边形 $ABCDE$ 内任取一点,

则该点取自正五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 内的概率是 $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$,

故答案为：$\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$.

16．已知双曲线 $C：\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1，F_2，直线 l：$y=3x+6$ 过点 F_1，且与双曲线 C 在第二象限交于点 P，若点 P 在以 F_1F_2 为直径的圆上，则双曲线 C 的离心率为__$\frac{\sqrt{10}}{2}$__.

【分析】求出双曲线的焦距，结合双曲线定义，利用勾股定理以及点到直线的距离，列出方程组，求出 a，即可求解双曲线的离心率.

解：双曲线 $C：\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0，b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2

直线 l：$y=3x+6$ 过点 F_1，可得 $c=2$,

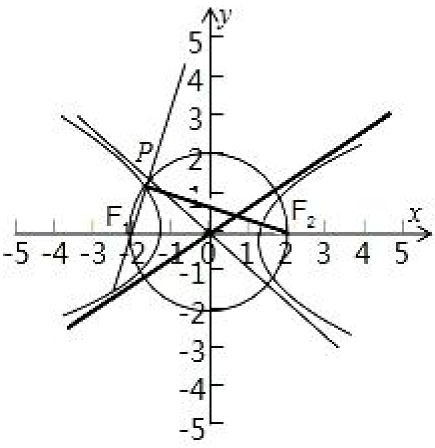
直线 l：$y=3x+6$ 过点 F_1 与双曲线 C 在第二象限交于点 P,

设 $PF_1=2m$，$PF_2=2a+2m$,

所以 $\begin{cases}(m+a)^2+m^2=4\\ \frac{|3\times0-0+6|}{\sqrt{1+9}}=m+a\end{cases}$，解得 $m=\frac{\sqrt{10}}{5}$，$a=\frac{2\sqrt{10}}{5}$,

可得 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\frac{2\sqrt{10}}{5}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{10}}{2}$.



三、解答题：共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_1=2$，$2S_n=(n+1)a_n(n\in N^*)$．

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=\dfrac{4}{(a_n+2)(a_{n+1}+2)}$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

【分析】（1）当$n\geq2$时，$2S_{n-1}=na_{n-1}$，可得$2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$（$n\geq2$），整理化简可得：$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}(n\geqslant2)$，利用“累乘求积法”可得$a_n$．

（2）由（1）可知$b_n=\dfrac{4}{(a_n+2)(a_{n+1}+2)}=\dfrac{4}{(2n+2)(2n+4)}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$，利用裂项求和方法即可得出．

解：（1）当$n\geq2$时，$2S_{n-1}=na_{n-1}$，又$2S_n=(n+1)a_n$，

相减可得$2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$（$n\geq2$），

整理得$(n-1)a_n=na_{n-1}$（$n\geq2$），则$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}(n\geqslant2)$，

故$a_n=a_1\times\dfrac{a_2}{a_1}\times\dfrac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2\times\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3}{2}\times\cdots\times\dfrac{n}{n-1}=2n(n\geqslant2)$，

当$n=1$时，$a_1=2$满足上式，故$a_n=2n$．

（2）由（1）可知$b_n=\dfrac{4}{(a_n+2)(a_{n+1}+2)}=\dfrac{4}{(2n+2)(2n+4)}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$，

则$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4})+(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5})+\cdots+(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2})=$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2n+4}$.

18．某航空公司规定：国内航班（不构成国际运输的国内航段）托运行李每件重量上限为 50*kg*，每件尺寸限制为 40*cm*×60*cm*×100*cm*，其中头等舱乘客免费行李额为 40*kg*，经济舱乘客免费行李额为 20*kg*．某调研小组随机抽取了 100 位国内航班旅客进行调查，得到如表数据；

携带行李重量（*kg*）	[0，20]	（20，30]	（30，40]	（40，50]
头等舱乘客人数	8	33	12	2
经济舱乘客人数	37	5	3	0
合计	45	38	15	2

（1）请完成答题卡上的 2×2 列联表，并判断是否在犯错概率不超过 0.05 的前提下，认为托运超额行李与乘客乘坐座位的等级有关？

（2）调研小组为感谢参与调查的旅客，决定从托运行李超出免费行李额且不超出 10*kg* 的旅客中（其中女性旅客 4 人）随机抽取 4 人，对其中的女性旅客赠送“100 元超额行李补助券”，记赠送的补助券总金额为 *X* 元，求 *X* 的分布列与数学期望．

参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$．

参考数据

$P(K^2 \geqslant k_0)$	0.050	0.010	0.001
k_0	3.841	6.635	10.828

【分析】（1）由题意补全列联表，计算观测值，对照临界值得出结论；

（2）根据题意知随机变量 *X* 的可能取值，计算所求的概率值，写出分布列，求出数学期望值．

解：（1）由题意补全 2×2 列联表如下；

	托运免费行李	托运超额行李	合计
头等舱乘客人数	53	2	55
经济舱乘客人数	37	8	45
合计	90	10	100

因为 $K^2=\frac{100\times(53\times8-2\times37)^2}{90\times10\times55\times45}=\frac{4900}{891}\approx5.50>3.841$，

所以在犯错概率不超过0.05的前提下，认为托运超额行李与乘客乘坐座位的等级有关．

（2）根据题意可得，托运行李超出免费行李额且不超过10*kg*的旅客有7人，

从中随机抽取4人，则其中女性旅客的人数可能为1、2、3、4，

所以补助券总金额*X*的所有取值可能为100元，200元，300元，400元；

计算$P(X=100)=\frac{C_4^1C_3^3}{C_7^4}=\frac{4}{35}$，

$P(X=200)=\frac{C_4^2C_3^2}{C_7^4}=\frac{18}{35}$，

$P(X=300)=\frac{C_4^3C_3^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$，

$P(X=400)=\frac{C_4^4C_4^0}{C_7^4}=\frac{1}{35}$，

所以*X*的分布列为：

X	100	200	300	400
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

数学期望为$EX=100\times\frac{4}{35}+200\times\frac{18}{35}+300\times\frac{12}{35}+400\times\frac{1}{35}=\frac{1600}{7}$（元）．

19．图1是由平行四边形*ABCD*和Rt△*ABE*组成的一个平面图形．其中∠*BAD*＝60°，*AB*⊥*AE*，*AD*＝*AE*＝2*AB*＝2，将△*ABE*沿*AB*折起到△*ABP*的位置，使得$PC=\sqrt{11}$，如图2．

（1）证明：*PA*⊥*BD*；

（2）求二面角*A*－*PD*－*B*的余弦值．

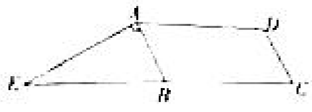


图1

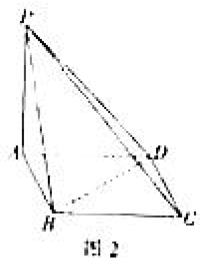


图2

【分析】（1）由已知得∠*ABC*＝120°，连接*AC*，在△*ABC*中，由余弦定理求得*AC*，利用勾股定理得到*PA*⊥*AC*，再由*PA*⊥*AB*，利用直线与平面垂直的判定可得*PA*⊥平面*ABCD*，从而得到*PA*⊥*BD*；

（2）由（1）可知 PA⊥平面 $ABCD$，以 D 为原点，以 DB，DC 的方向分别为 x 轴，y 轴的正方向，以过点 D 作 PA 的平行线为 z 轴，建立空间直角坐标系 $D-xyz$，分别求出平面 PAD 与平面 PBD 的一个法向量，由两法向量所成角的余弦值可得二面角 $A-PD-B$ 的余弦值.

解：（1）证明：∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle BAD=60°$，∴$\angle ABC=120°$.

连接 AC，在△ABC 中，根据余弦定理得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=7$，

∵$PC=\sqrt{11}$，$PA=2$，∴$PC^2=AC^2+PA^2$，得 $PA\perp AC$，

∵$PA\perp AB$，且 $AB\cap AC=A$，∴PA⊥平面 $ABCD$，

∵$BD\subset$平面 $ABCD$，∴$PA\perp BD$；

（2）∵$BC=2$，$CD=1$，$\angle BCD=60°$，

∴$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos\angle BCD=3$，

∴$BD^2+CD^2=BC^2$，得 $BD\perp CD$.

由（1）可知 PA⊥平面 $ABCD$，

则以 D 为原点，以 DB，DC 的方向分别为 x 轴，y 轴的正方向，以过点 D 作 PA 的平行线为 z 轴，

建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，

则 $D(0,0,0)$，$A(\sqrt{3},-1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$P(\sqrt{3},-1,2)$，

故 $\overrightarrow{DA}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{DP}=(\sqrt{3},-1,2)$，$\overrightarrow{DB}=(\sqrt{3},0,0)$.

设平面 PAD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DA}=\sqrt{3}x_1-y_1=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=\sqrt{3}x_1-y_1+2z_1=0\end{cases}$，令 $x_1=1$，可得 $\vec{n}=(1,\sqrt{3},0)$；

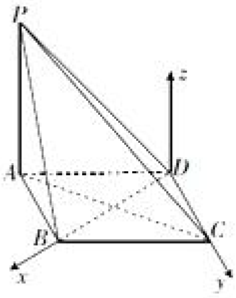
设平面 PBD 的一个法向量是 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DB}=\sqrt{3}x_2=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DP}=\sqrt{3}x_2-y_2+2z_2=0\end{cases}$，令 $y_2=2$，可得 $\vec{m}=(0,2,1)$.

故 $\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

设二面角 $A-PD-B$ 为θ，由图可知θ为锐角，

则 $\cos\theta=\cos\langle\vec{n},\vec{m}\rangle=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$.



20． 已知函数$f(x)=-\frac{1}{6}x^3-x^2+mx+3$在$x=0$处取得极值．

（1）求m的值；

（2）若过点（2，t）可作曲线$y=f(x)$的三条切线，求t的取值范围．

【分析】（1）对$f(x)$求导，再结合题意可得$f'(0)=0$，解得m．

（2）设切点坐标为$(x_0,\ -\frac{1}{6}x_0^3-x_0^2+3)$，由导数的几何意义可得切线斜率$k=f'(x_0)=-\frac{1}{2}x_0^2-2x_0$，写出切线的方程，再代入（2，$t$），得$t=\frac{1}{3}x_0^3-4x_0+3$．令$g(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+3$，由于有三条切线所以$y=t$与$y=g(x)$由三个交点．对函数$g(x)$求导分析单调性及极值，进而得出$t$的取值范围．

解：（1）因为$f(x)=-\frac{1}{6}x^3-x^2+mx+3$，以$f'(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+m$．

因为$f(x)$在$x=0$处取得极值，所以$f'(0)=m=0$．

经验证$m=0$符合题意．

（2）设切点坐标为$(x_0,\ -\frac{1}{6}x_0^3-x_0^2+3)$，

由$f(x)=-\frac{1}{6}x^3-x^2+3$，得$f'(x_0)=-\frac{1}{2}x_0^2-2x_0$，

所以切线方程为$y-(-\frac{1}{6}x_0^3-x_0^2+3)=(-\frac{1}{2}x_0^2-2x_0)(x-x_0)$，

将（2，t）代入切线方程，得$t=\frac{1}{3}x_0^3-4x_0+3$．

令$g(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+3$，则$g'(x)=x^2-4$，

则$g'(x)=x^2-4=0$，解得$x=\pm2$．

当$x<-2$或$x>2$时，$g'(x)>0$，

所以$g(x)$在$(-\infty,\ -2)$，$(2,\ +\infty)$上单调递增；

当$-2<x<2$时，$g'(x)<0$，

所以$g(x)$在$(-2,\ 2)$上单调递减．

所以 $g(x)$ 的极大值为 $g(-2)=\frac{25}{3}$，$g(x)$ 的极小值为 $g(2)=-\frac{7}{3}$.

因为有三条切线，所以方程 $t=g(x)$ 有三个不同的解，$y=t$ 与 $y=g(x)$ 的图象有三个不同的交点，

所以 $-\frac{7}{3}<t<\frac{25}{3}$.

21．已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$，左、右焦点分别为 F_1，F_2，且 F_2 到直线 l：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 的距离为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

（1）求椭圆 C 的方程.

（2）过 F_1 的直线 m 交椭圆 C 于 P，Q 两点，O 为坐标原点，以 OP，OQ 为邻边作平行四边形 $OPDQ$，是否存在直线 m，使得点 D 在椭圆 C 上？若存在，求出直线 m 的方程；若不存在，说明理由.

【分析】（1）根据离心率得到 a，b，c 的关系，进而可表示出直线 l 的方程为 $\sqrt{3}x+2y-2\sqrt{3}c=0$，则可表示出 F_2 到直线的距离 $\frac{|\sqrt{3}c-2\sqrt{3}c|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，解得 $c=1$，即可得到 C 的方程；

（2）考虑直线 PQ 斜率存在时的情况，联立直线与椭圆方程，利用根与系数关系结合平行四边形性质，运用向量法得到 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$，求得 D 的坐标，代入椭圆方程，解出 $k\in\emptyset$；斜率不存在时 m：$x=-1$，满足条件，得到 D 坐标

解：（1）因为椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，

所以 $a=2c$，$b=\sqrt{3}c$，

所以直线 l 的方程为 $\frac{x}{2c}+\frac{y}{\sqrt{3}c}=1$，

即 $\sqrt{3}x+2y-2\sqrt{3}c=0$.

由题意可得 $F_2(c,0)$，则 $\frac{|\sqrt{3}c-2\sqrt{3}c|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，解得 $c=1$.

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）①当直线 PQ 的斜率存在时，

设直线 m 的方程为 $y=k(x+1)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}y=k(x+1)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$，整理得（$3+4k^2$）$x^2+8k^2x+4k^2-12=0$，

则$x_1+x_2=\frac{-8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$.

设D（x_0，y_0），由四边形$OPDQ$为平行四边形，得$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$，

则$\begin{cases}x_0=x_1+x_2=\frac{-8k^2}{3+4k^2}\\ y_0=y_1+y_2=\frac{6k}{3+4k^2}\end{cases}$，即$D(\frac{-8k^2}{3+4k^2}，\frac{6k}{3+4k^2})$，

若点D落在椭圆C上，则$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，

即$\frac{(\frac{-8k^2}{3+4k^2})^2}{4}+\frac{(\frac{6k}{3+4k^2})^2}{3}=1$，

整理得$\frac{16k^4+12k^2}{(3+4k^2)^2}=1$，解得$k\in\varnothing$.

②当直线PQ的斜率不存在时，直线m的方程为$x=-1$，

此时存在点D（-2，0）在椭圆C上.

综上，存在直线m：$x=-1$，使得点D（-2，0）在椭圆C上.

22．已知函数$f(x)=lnx-ax+1$有两个零点.

（1）求a的取值范围；

（2）设x_1，x_2是$f(x)$的两个零点，证明：$f'(x_1\cdot x_2)<1-a$.

【分析】（1）由题意推出$a=\frac{1+\ln x}{x}$，构造函数，问题转化为函数$g(x)=\frac{1+\ln x}{x}$与$y=a$在（0，+∞）上有两个不同交点，通过函数的导数，判断函数的单调性，求解函数的最小值，然后求解a的范围.

（2）求出$f'(x)=\frac{1}{x}-a$，要证$f'(x_1\cdot x_2)<1-a$，只需证（ax_1-1）+（ax_2-1）>0，

即证$\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$.

令 $t=\frac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，$h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$，$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，转化证明即可．

解：（1）由题意，可得 $a=\frac{1+\ln x}{x}$，转化为函数 $g(x)=\frac{1+\ln x}{x}$ 与直线 $y=a$ 在（0，+∞）上有两个不同交点，

$g'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}(x>0)$，故当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$．

故 $g(x)$ 在（0，1）上单调递增，在（1，+∞）上单调递减，

所以 $g(x)_{max}=g(1)=1$．

又 $g(\frac{1}{e})=0$，故当 $x\in(0,\frac{1}{e})$ 时，$g(x)<0$；

当 $x\in(\frac{1}{e},+\infty)$ 时，$g(x)>0$．

可得 $a\in(0,1)$．

（2）证明：$f'(x)=\frac{1}{x}-a$，

由（1）知 x_1，x_2 是 $\ln x-ax+1=0$ 的两个根，

故 $\ln x_1-ax_1+1=0$，$\ln x_2-ax_2+1=0\Rightarrow a=\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$，

要证 $f'(x_1\cdot x_2)<1-a$，只需证 $x_1\cdot x_2>1$，即证 $\ln x_1+\ln x_2>0$，

即证 $(ax_1-1)+(ax_2-1)>0$，

即证 $a>\frac{2}{x_1+x_2}$，即证 $\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{2}{x_1+x_2}$．

不妨设 $0<x_1<x_2$，故 $\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{2(x_1-x_2)}{x_1+x_2}=\frac{2(\frac{x_1}{x_2}-1)}{\frac{x_1}{x_2}+1}$ (*)，

令 $t=\frac{x_1}{x_2}\in(0,1)$，$h(t)=\ln t-\frac{2(t-1)}{t+1}$，$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{4}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$，

则 $h(t)$ 在（0，1）上单调递增，则 $h(t)<h(1)=0$，故 (*) 式成立，即要证不等式得证．