绝密★启用前

2015年普通高等学校招生全国统一考试(山东卷)
理科数学

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，共 4页。满分 150分。考试用时 120分钟。考试结束后，将将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1.答卷前，考生务必用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、座号、考生号县区和科类填写在答题卡和试卷规定的位置上。

2.第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，在选涂其他答案标号。答案卸载试卷上无效。

3. 第Ⅱ卷必须用 0.5毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置，不能写在试卷上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不能使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

4.填空题直接填写答案， 解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

参考公式：

如果事件 A,B互斥，那么 P(A+B)=P(A)+P(B).

第Ⅰ卷(共 50 分)

一、 选择题： 本大题共 10小题， 每小题 5分， 共 50分， 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的

(1) 已知集合 $A=\{X|X^2-4X+3<0\}$，$B=\{X|2<X<4\}$,则 $A\cap B=$

(A)(1，3) (B)(1，4) (C)(2，3) (D)(2，4)

【答案】 C

(2)若复数 Z满足 $\frac{\overline{Z}}{1-i}=i$，其中 i为虚数为单位，则 Z=

(A) 1-i (B) 1+i (C) -1-i (D) -1+i

【答案】 A

(3) 要得到函数 $y=\sin(4x-\frac{\pi}{3})$ 的图像，只需要将函数 $y=\sin 4x$ 的图像 ()

(A)向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位 (B)向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位

(C)向左平移$\frac{\pi}{3}$个单位 (D)向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位

【答案】 B

(4)已知 $ABCD$ 的边长为 a，$\angle ABC=60^\circ$，则$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CD}=$

(A) $-\frac{3}{2}a^2$　(B) $-\frac{3}{4}a^2$　(C) $\frac{3}{4}a^2$　(D) $\frac{3}{2}a^2$

【答案】 D

(5)不等式|X-1|- |X-5|<2 的解集是

(A)(-∞ , 4)　(B)(-∞ , 1)　(C)(1, 4)　(D)(1, 5)

【答案】 A

(6)已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\geq 0 \\ x+y\leq 2 \\ y\geq 0 \end{cases}$，若 z=ax+y 的最大值为 4，则 a=_

(A) 3　(B) 2　(C) −2　(D) −3

【答案】 B

(7) 在梯形 ABCD 中，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$，AD//BC，BC=2AD=2AB=2.将梯形 ABCD 绕 AD 所在的直线旋转一周而形成的曲面所围成的几何体的体积为

(A) $\frac{2\pi}{3}$　(B) $\frac{4\pi}{3}$　(C) $\frac{5\pi}{3}$　(D) 2π

【答案】 C

(8) 已知某批零件的长度误差(单位： 毫米) 服从正态分布 N (0，3)，从中随机取一件，其长度误差落在区间(3,6)内的概率为

(附：若随机变量 ξ 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$)，则 $P(\mu-\sigma<\xi<\mu+\sigma)$=68.26%，$P(\mu-2\sigma<\xi<\mu+2\sigma)$=95.44%.)

(A) 4.56%　(B) 13.59%　(C) 27.18%　(D) 31.74%

【答案】 B

(9) 一条光纤从点(-2，-3) 射出， 经 y 轴反射后与圆 $(x+3)^2+(y-2)^2=1$ 相切，则反射光线所在直线的斜率为()

(A) $-\frac{5}{3}$或$-\frac{3}{5}$ (B) $-\frac{3}{2}$或$-\frac{2}{3}$

(C) $-\frac{5}{4}$或$-\frac{4}{5}$ (D) $-\frac{4}{3}$或$-\frac{3}{4}$

【答案】 D

(10)设函数 f(x)=$\begin{cases} 3x-1, x<1 \\ 2^x, x\geq 1 \end{cases}$,则满足 $f(f(a))=2^{f(a)}$的 a 取值范围是()

(A) $[\frac{2}{3},1]$ (B) [0,1]

(C) $[\frac{2}{3},+\infty)$ (D) $[1,+\infty)$

【答案】 C

第 II 卷(共 100 分)

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

(11) 观察下列各式：

$C_1^0=4^0$

$C_3^0+C_3^1=4^1$;

$C_5^0+C_5^1+C_5^2=4^2$;

$C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3=4^3$;

……

照此规律， 当 n仁N 时，

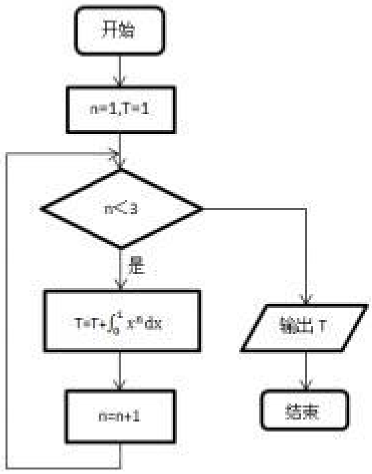
$C^0_{2n-1}+C^1_{2n-1}+C^2_{2n-1}+\cdots+C^{n-1}_{2n-1}=$________.

【答案】 4^{n-1}

(12)若 “V x 仁 [0, $\frac{\pi}{4}$]，tanx共 m” 是真命题， 则实数m 的最小值为_________.

【答案】 1

(13)执行右边的程序框图， 输出的 T 的值为_____________.



【答案】 $\frac{11}{6}$

(14)已知函数$f(x)=a^x+b(a>0,a$才$1)$ 的定义域和值域都是$[-1,0]$， 则 $a+b=$

【答案】 $-\frac{3}{2}$

(15) 平面直角坐标系 xOy 中， 双曲线 C: $\frac{x2}{a2}-\frac{y2}{b2}=1$ (a>0, b>0) 的渐近线与抛物线 C_2: $X^2=2py$(p>0)交于 0，若▷OAB 的垂心为 C2 的焦点，则 C 1 的离心率为 ____

【答案】 $\frac{3}{2}$

三、解答题：本答题共 6 小题，共 75 分。

(16)(本小题满分 12 分)

设 f (x) $=\sin x\cos x-\cos^2(x+\frac{\pi}{4})$.

(I)求 f (x)的单调区间；

(II) 在锐角◁ABC 中， 角 A,B,C,的对边分别为 a,b,c,若 f ($\frac{A}{2}$) =0,a=1,求▷ABC 面积的最大值。

(17)(本小题满分 12 分)

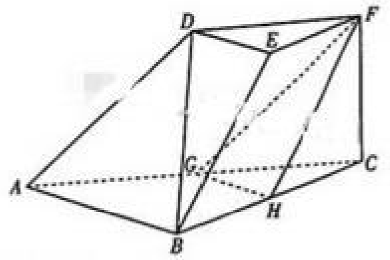
如图，在三棱台 DEF-ABC 中，

AB=2DE,G,H 分别为 AC,BC 的中点。

(Ⅰ)求证： BD//平面 FGH；

(Ⅱ)若 CF⊥平面 ABC，AB⊥BC，CF=DE, ∠BAC=45^0 ，

求平面 FGH 与平面 ACFD 所成的角(锐角)的大小.



(18)(本小题满分 12 分)

设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n. 已知 $2S_n=3^n+3$.

(Ⅰ)求$\{a_n\}$的通项公式；

(Ⅱ)若数列 $\{b_n\}$ 满足$a_nb_n=\log_3^{a_n}$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和T_n.

(19)(本小题满分 12 分) 若n是一个三位正整数， 且n的个位数字大于十位数字，十位数字大于百位数字，则称n为“三位递增数”(如 137,359,567 等)

在某次数学趣味活动中，每位参加者需从所有的“三位递增数”中随机抽取 1 个数， 且只能抽取一次.得分规则如下： 若抽取的“三位递增数”的三个数字之积不能被 5 整除， 参加者得 0 分； 若能被 5 整除， 但不能被 10 整除， 得—1分； 若能被 10 整除，得 1 分.

(Ⅰ)写出所有个位数字是 5 的“三位递增数” ；

(Ⅱ)若甲参加活动，求甲得分 X 的分布列和数学期望EX.

(20)(本小题满分 13 分) 平面直角坐标系x0y中， 已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，左、右焦点分别是$F_1$、$F_2$. 以$F_1$为圆心以 3 为半径的圆与以$F_2$为圆心 1 为半径的圆相交，且交点在椭圆C上.

(Ⅰ)求椭圆C的方程；

(Ⅱ)设椭圆E:$\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$, P为椭圆C上任意一点，过点P的直线

$y=kx+m$ 交椭圆E 于A, B两点，射线P0 交椭圆 E于点 Q.

(ⅰ)求$\frac{|OQ|}{|OP|}$的值；

(ⅱ)求△ABQ面积的最大值.

(21)(本小题满分 14 分)

设函数 f(x)=In(x+1)+α(x^2 -x)，其中$\alpha\in R$。

(Ⅰ)讨论函数 f(x)极值点的个数，并说明理由；

(Ⅱ)若 V_{Ξ}>0，f(Ξ) > 0成立，求α 的取值范围。

山东省 2015 年夏季高考数学参考答案(理科)

一、 CABDA ACBDC

二、 11 、4^{n-1} 12 、1 13 、$\frac{11}{6}$ 14 、$-\frac{3}{2}$ 15 、$\frac{3}{2}$

16 、解： (1) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1+\cos 2(x+\frac{\pi}{4})}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos(2x+\frac{\pi}{2})-\frac{1}{2}$

$$=\sin 2x-\frac{1}{2}$$

由$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x\le 2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$得$k\pi-\frac{\pi}{4}\le x\le k\pi+\frac{\pi}{4},k\in Z$

所以函数f(x)的单调增区间为$[k\pi-\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{\pi}{4}],k\in Z$

同理函数f(x)的单调减区间为$[k\pi+\frac{\pi}{4},k\pi+\frac{3\pi}{4}],k\in Z$

(2) 由 (1) 知$\sin A=\frac{1}{2}$,又因为$A\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$

$$\because a=1\ \therefore b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{6}=1$$

即$b^2+c^2-\sqrt{3}bc=1$

$\therefore bc\le 2+\sqrt{3}$,当且仅当$b=c=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$时等号成立

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}bc\le\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$\therefore$ △ABC的面积的最大值为$\frac{2+\sqrt{3}}{4}$

17、解：(1) 连接 DC交 FG于 Q，连接 QH

∵在三棱台 DEF-ABC 中， AB=2DE

$$\therefore AC\parallel DF，AC=2DF$$

∵G为 AC中点

$$\therefore DF=CG$$

∴ 四边形 DGCF 为平行四边形

∴ Q 为线段 DC 的中点

又 H 为线段 BC 的中点

$$\therefore BD\parallel QH$$

$$\because BD\not\subset FGH，QH\subset 平面\ FGH$$

$$\therefore BD\parallel 平面\ FGH$$

(2) 由已知若 CF⊥平面 ABC，则可以 C 为原点， CA 为 X 轴， CF 为 Z 轴建立空间直角坐标系。设 CF=1，则 DE=1，AB=2

又因为 CF=DE, ∠BAC=45^0，所以 AC=2DF=$2\sqrt{2}$

$$\therefore F(0,0,1) \quad G(\sqrt{2},0,0) \quad H(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$$

设平面 FGH 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$

$$\therefore \vec{n}\perp\vec{GF} \quad \vec{n}\perp\vec{GH}$$

$$\therefore \vec{GF}=(-\sqrt{2},0.1), \vec{GH}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$$

$$\therefore -\sqrt{2}x+z=0, -\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y=0$$

令$x=1$,则 $y=1, z=\sqrt{2}$,所以 $\vec{n}=(1,1,\sqrt{2})$

又因为平面 ACFD 的法向量为 $\vec{m}=(0,1,0)$

$$\cos<\vec{n},\vec{m}>=\frac{1}{2}$$

所以平面 FGH 与平面 ACFD 所成的角(锐角)的大小为 60°

或过 H 作 HP⊥GC 于 P，作 PN⊥FG 于 N，连接 NH

由 CF⊥平面 ABC 知 FC⊥HP，所以 HP⊥平面 ACFD

由三垂线定理知∠HNP 为所求二面角的平面角

设 CF=1，易求 HP=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，PN=$\frac{\sqrt{6}}{6}$，$\therefore \tan\angle HNP=\sqrt{3}$

$$\therefore \angle HNP=60°$$

所以平面 FGH 与平面 ACFD 所成的角(锐角)的大小为 60°

18、(1)当$n=1$时， $S_1=3$,即$a_1=3$

当$n\geq 2$时， $a_n=S_n-S_{n-1}=3^{n-1}$

所以$a_n=\begin{cases}3, n=1\\ 3^{n-1} n\geq 2\end{cases}$

(2)由已知$b_n=\begin{cases}\frac{1}{3} & n=1\\ \frac{n-1}{3^{n-1}}, & n\geq 2\end{cases}$

当$n=1$时， $T_1=\frac{1}{3}$

当$n\geq 2$时， $T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{n-1}{3^{n-1}}$

$$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}$$

$$\frac{2}{3}T_n=\frac{2}{9}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}})-\frac{n-1}{3^n}=\frac{13}{18}-\frac{2n+1}{2\times 3^n}$$

$$T_n=\frac{13}{12}-\frac{2n+1}{4\times 3^{n-1}}$$

$T_1=\frac{1}{3}$也适合上式

所以$T_n=\frac{13}{12}-\frac{2n+1}{4\times 3^{n-1}}$

19、(1)所有个位数字是 5 的三位递增数为： 125，135，145，235，245，345

(2) 甲得分 X 的所有可能取值为 0 、-1 ，1

$$P(X=0)=\frac{C_8^3}{C_9^3}=\frac{2}{3}$$

$$P(X=-1)=\frac{C_4^2}{C_9^3}=\frac{1}{14}$$

$$P(X=1)=\frac{C_4^1C_4^1+C_4^2}{C_9^3}=\frac{11}{42}$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	-1	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{11}{42}$

$$E(X)=-\frac{4}{21}$$

20(1)由题意知$2a=|PF_1|+|PF_2|=4$

$$\therefore a=2$$

$$\because \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore c=\sqrt{3}$$

$$\therefore b=1$$

所以所求椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) (i)设直线 OP 的方程为$y=tx$

$$\begin{cases} y=tx \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$$

$$\therefore x_P^2=\frac{4}{1+4t^2},\qquad y_P^2=\frac{4t^2}{1+4t^2}$$

同理

$$\therefore x_Q^2=\frac{16}{1+4t^2},\qquad y_Q^2=\frac{16t^2}{1+4t^2}$$

$$\therefore \frac{|OQ|}{|OP|}=\frac{\sqrt{\frac{16}{1+4t^2}+\frac{16t^2}{1+4t^2}}}{\sqrt{\frac{4}{1+4t^2}+\frac{4t^2}{1+4t^2}}}=2$$

（ii）$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-4=0$

$$\therefore 4k^2-m^2+1\geq 0 \quad (1)$$

$$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$$

消去 y 得： $(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-16=0$

$$\therefore \Delta=16(16k^2-m^2+4)>0 \qquad (2)$$

设$A(x_1,y_1)$， B (x_2,y_2)

$$\therefore x_1+x_2=\frac{-8km}{1+4k^2}$$

$$x_1x_2=\frac{4m^2-16}{1+4k^2}$$

$$\therefore |AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\frac{\sqrt{16(16k^2-m^2+4)}}{1+4k^2}$$

又由（ i ）得$S_{\Delta ABQ}=3S_{\Delta OAB}=3\times\frac{1}{2}\times\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}\times\sqrt{1+k^2}\frac{\sqrt{16(16k^2-m^2+4)}}{1+4k^2}$

$$=\frac{6\sqrt{(16k^2-m^2+4)m^2}}{1+4k^2}=6\sqrt{\left(4-\frac{m^2}{1+4k^2}\right)\frac{m^2}{1+4k^2}}$$

设$t=\frac{m^2}{1+4k^2}$，由(1)(2)知$0\leq t\leq 1$

$$S_{\Delta ABQ}=6\sqrt{(4-t)t}\leq 6\sqrt{3}$$

当且仅当$t=1$时，此时$4k^2+1=m^2$时取等号，

所以ΔABQ 面积的最大值为 $6\sqrt{3}$。

21、解(I) $f'(x)=\frac{ax^2+ax-a+1}{x+1}$，问题转化为$ax^2+ax-a+1=0$ 的根的问题

当$a=0$ 时，$f'(x)>0$, 不存在极值点

当$a\neq 0$ 时，$\Delta=9a^2-8a$

当$\Delta \leq 0$时即 $0 < a \leq \frac{8}{9}$, $f'(x) > 0$, 不存在极值点

当$\Delta > 0$时，$x_1 = \frac{-a-\sqrt{9a^2-8a}}{2a}$, $x_2 = \frac{-a+\sqrt{9a^2-8a}}{2a}$

$a < 0$时， $x_1 \in (-1，\quad +\infty)$，$x_2 = \frac{-a+\sqrt{9a^2-8a}}{2a} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{2}{a}} < -2$

则$x_2 \notin (-1，\quad +\infty)$,

x	$(-1, x_1)$	x1	$(x_1, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-
f(x)	↑	极大值	↓

存在一个极值点

$a > \frac{8}{9}$ 时 ， $x_1 = \frac{-a-\sqrt{9a^2-8a}}{2a} = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{2}{a}} > -1$, $x_2 = \frac{-a+\sqrt{9a^2-8a}}{2a} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{2}{a}}$，$x_1$，$x_2 \in (-1，\quad +\infty)$,

x	$(-1, x_1)$	x1	(x_1, x_2)	x2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
f(x)	↑	极大值	↓	极小值	↑

所以存在两个极值点

综上所述$0 \leq a \leq \frac{8}{9}$, f(x)不存在极值点

$a > \frac{8}{9}$时，f(x)存在两个极值点

$a < 0$时， f(x)存在一个极值点

(2) 法 1：由(I)知$a < 0$时, 设$g(x) = x - \ln(x+1)$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} > 0$$

$$g(x)\text{在}(0，+\infty)\text{上单调递增}$$

$$g(x) > g(0) = 0 \text{ 即} x > \ln(x+1)$$

$$f(x) < x + a(x^2 - x) = ax[x - (1 - \frac{1}{a})]$$

所以当$x > 1 - \frac{1}{a}$时$f(x) < 0$，不符合题意

当$0 \leq a \leq \frac{8}{9}$时， f(x)在(0, +∞)上单调递增， $f(x) \geq 0$恒成立

当$\frac{8}{9} < a \leq 1$时， $x_2 \leq 0$，$f(x)$在$(0, +\infty)$上单调递增， $f(x) \geq 0$恒成立

当$a > 1$时， $x_2 > 0$，$f(x)$在$(0, x_2$上单调递减，此时$f(x) < 0$，不符合题意

综上所述a 的取值范围是[0， 1]

法 2：$f(x) \geq 0$得$\frac{\ln(x+1)}{x} \geq -a(x-1)$

问题可转化为函数$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$的图像不在直线$y = -a(x-1)$的下方

$$g'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2}$$

设$h(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$

$$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x}{(x+1)^2} < 0$$

$$\therefore h(x) = \frac{x}{x+1} + \ln(x+1) \text{ 在}(0。+\infty)\text{上单调递减}$$

$$\therefore h(x) < 0\text{，即}g'(x) < 0$$

$$\therefore g(x)\text{在}(0，+\infty)\text{上单调递减}$$

所以$g(x) \in$ （0，1），*由*于$y = -a(x-1)$过定点（1，0），

由图形知$-1 \leq -a \leq 0$

所以a 的取值范围是[0， 1]