2016-2017学年福建省漳州市八校联考高三（上）期末数学试卷（理科）

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．请把答案填涂在答题卷相应位置上．

1．已知集合A={0，1，m}，B={x|0<x<2}，若A∩B={1，m}，则m的取值范围是（　　）

A．（0，1）B．（1，2）C．（0，1）∪（1，2）　D．（0，2）

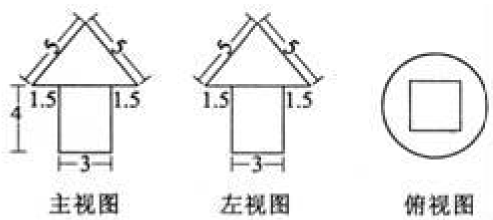
2．复数$z=\frac{(2+i)^2}{1-i}$（i是虚数单位）在复平面上对应的点位于（　　）

A．第一象限　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

3．若$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$，且$\vec{c}\perp\vec{a}$，则向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

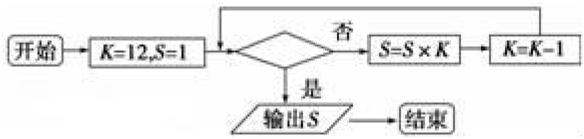
A．30°　B．60°　C．120°D．150°

4．如图是一个几何体的三视图，尺寸如图所示，（单位：cm），则这个几何体的体积是（　　）



A．（10π+36）cm^3　B．（11π+35）cm^3　C．（12π+36）cm^3　D．（13π+34）cm^3

5．程序框图如图：如果上述程序运行的结果S=1320，那么判断框中应填入（　　）

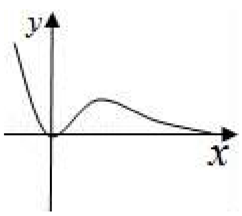
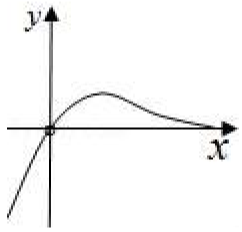
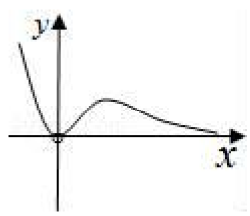


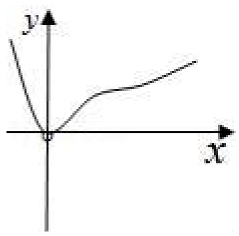
A．K<10　B．K≤10　C．K<11　D．K≤11

6．等差数列{a_n}中，S_n是前n项和，且$S_3=S_8$，$S_7=S_k$，则k的值为（　　）

A．4　B．11　C．2　D．12

7．函数$y=\frac{x^3}{3^x-1}$的图象大致是（　　）

A.  B.  C . 

D. 

8．在平面直角坐标系中，不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 0\\x-y+4\geqslant 0\\x\leqslant a\end{cases}$，（a 是常数）表示的平面区域面积是 9，那么实数 a 的值为（　　）

A．$3\sqrt{2}+2$　B．$-3\sqrt{2}+2$　　C．－5 D．1

9．若函数$f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$，为了得到函数 g（x）=sin2x 的图象，则只需将 f（x）的图象（　　）

A．向右平移$\frac{\pi}{6}$个长度单位 B．向右平移$\frac{\pi}{3}$个长度单位

C．向左平移$\frac{\pi}{6}$个长度单位 D．向左平移$\frac{\pi}{3}$个长度单位

10．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的右顶点为 E，过双曲线的左焦点且垂直于 x 轴的直线与该双曲线相交于 A、B 两点，若∠AEB=90°，则该双曲线的离心率 e 是（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　B．2　C．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$或 2　D．不存在

11．若关于 x 的方程$|x^3-ax^2|=x$有不同的四解，则 a 的取值范围为（　　）

A．a＞1　B．a＜1　C．a＞2　D．a＜2

12．设 f（x）是定义在 R 上的恒不为零的函数，对任意实数 x，y∈R，都有 f（x）•f（y）=f（x+y），若$a_1=\frac{1}{2}$，a_n=f（n）（n∈N^*），则数列$\{a_n\}$的前 n 项和S_n的取值范围是（　　）

A．[$\frac{1}{2}$，2）　B．[$\frac{1}{2}$，2] C．[$\frac{1}{2}$，1）　D．[$\frac{1}{2}$，1]

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．请把答案填在答题卷的相应位置

13．数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2a_n-1$，则$\{a_n\}$的通项公式为 a_n=____．

14．半径为 R 的球放在房屋的墙角处，球与围成墙角的三个互相垂直的面都相切，若球心到墙角的距离是$\sqrt{3}$，则球的表面积是____．

15．抛物线 $y^2=ax$（$a>0$）与直线 $x=1$ 围成的封闭图形的面积为$\frac{4}{3}$，则二项式$(x+\frac{a}{x})^{20}$展开式中含 x^{-16}项的系数是____．

16．已知点 O 是△ABC 的外接圆圆心，且 AB=3，AC=4．若存在非零实数 x、y，使得$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，且 $x+2y=1$，则 cos∠BAC=____．

三、解答题：本大题共 5 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请把答案写在答题卷的相应位置．

17．△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．向量$\overrightarrow{m}$=（a，$\sqrt{3}$ b）与$\overrightarrow{n}$=（cosA，sinB）平行．

（Ⅰ）求 A；

（Ⅱ）若 $a=\sqrt{7}$，b=2，求△ABC 的面积．

18．在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{c\cdot a_n+1}$（c 为常数，n∈N*），且 a_1，a_2，a_5成公比不为 1 的等比数列．

（Ⅰ）求证：数列$\{\frac{1}{a_n}\}$是等差数列；

（Ⅱ）求 c 的值；

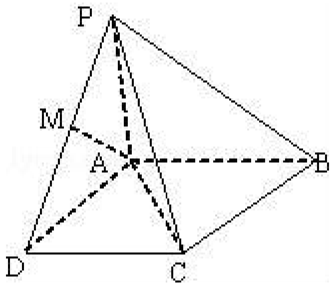
（Ⅲ）设 $b_n=a_na_{n+1}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n．

19．如图，四棱锥 P﹣ABCD 中，PA⊥底面 ABCD，AB∥CD，AD=CD=1，∠BAD=120°，PA=$\sqrt{3}$，∠ACB=90°，M 是线段 PD 上的一点（不包括端点）．

（Ⅰ）求证：BC⊥平面 PAC；

（Ⅱ）求二面角 D﹣PC﹣A 的正切值；

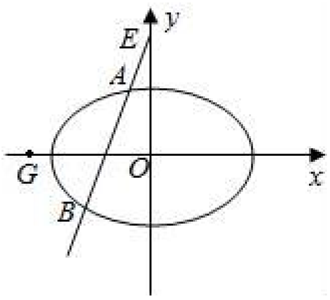
（Ⅲ）试确定点 M 的位置，使直线 MA 与平面 PCD 所成角θ的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$．



20．已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）过点$(0,\sqrt{2})$，且离心率 e 为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设直线 x=my﹣1（m∈R）交椭圆 E 于 A，B 两点，判断点 G$(-\frac{9}{4},0)$与以线段 AB 为直径的圆的位置关系，并说明理由.



21．已知函数 f（x）=lnx+ax²，g（x）=$\frac{1}{x}$+x+b，且直线 y=﹣$\frac{1}{2}$是函数 f（x）的一条切线.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）对任意的 x_1∈[1，$\sqrt{e}$]，都存在 x_2∈[1，4]，使得 f（x_1）=g（x_2），求 b 的取值范围.

选修 4-4 坐标系及参数方程

22．已知曲线 C_1 的极坐标方程为ρ=6cosθ，曲线 C_2 的极坐标方程为θ=$\frac{\pi}{4}$（p∈R），曲线 C_1，C_2 相交于 A，B 两点.

（Ⅰ）把曲线 C_1，C_2 的极坐标方程转化为直角坐标方程；

（Ⅱ）求弦 AB 的长度.

选修 4-5：不等式选讲

23．已知函数 $f(x)=|x-1|+|2x+2|$．

（1）解不等式 $f(x)>5$；

（2）若关于 x 的方程 $\frac{1}{f(x)-4}=a$ 的解集为空集，求实数 a 的取值范围．

2016-2017 学年福建省漳州市八校联考高三（上）期末数学试卷（理科）

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．请把答案填涂在答题卷相应位置上．

1．已知集合 $A=\{0，1，m\}$，$B=\{x|0<x<2\}$，若 $A\cap B=\{1，m\}$，则 m 的取值范围是（　　）

A．（0，1） B．（1，2） C．（0，1）∪（1，2） D．（0，2）

【考点】交集及其运算．

【分析】根据集合的基本运算进行求解．

【解答】解：∵$A=\{0，1，m\}$，

∴$m\neq 0$ 且 $m\neq 1$，

∵$A\cap B=\{1，m\}$，

∴$0<m<2$，

综上 $0<m<2$ 且 $m\neq 1$，

故 m 的取值范围是（0，1）∪（1，2），

故选：C

2．复数 $z=\frac{(2+i)^2}{1-i}$（i 是虚数单位）在复平面上对应的点位于（　　）

A．第一象限　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

【考点】复数代数形式的混合运算．

【分析】化简复数的分子，然后分母实数化，化复数为 a+bi（a、b∈R）可得对应的点位于的象限．

【解答】解：复数 $z=\frac{(2+i)^2}{1-i}=\frac{3+4i}{1-i}=\frac{(3+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-1+7i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$

故选 B．

3．若 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$，且$\vec{c}\perp\vec{a}$，则向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为（　　）

A．30° B．60° C．120°D．150°

【考点】数量积表示两个向量的夹角．

【分析】要求两个向量的夹角，需要知道两个向量的模和夹角，而夹角是要求的结论，所以根据两个向量垂直，数量积为零，把式子变化出现只含向量夹角余弦的方程，解出夹角的余弦值，根据角的范围，得到结果．

【解答】解：若 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$，

设向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为θ

∵$\vec{c}\perp\vec{a}$，

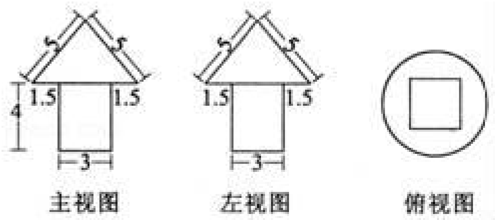
∴$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=0$，

则 $|\vec{a}|^2+|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=0$

∴$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$　∴ $\theta=120^0$

故选 C

4．如图是一个几何体的三视图，尺寸如图所示，（单位：cm），则这个几何体的体积是（　　）



A．（10π+36）cm^3　B．（11π+35）cm^3　C．（12π+36）cm^3　D．（13π+34）cm^3

【考点】由三视图求面积、体积．

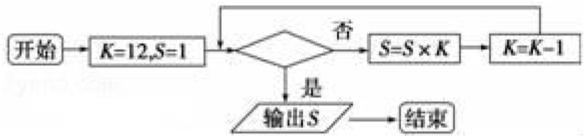
【分析】由三视图可知：该几何体是一个由上下两部分组成的几何体，其中上面是一个圆锥，底面半径为 3，高为 4；下面是一个棱长分别为 3，3，4 的长方体．．据此即可得出体积．

【解答】解：由三视图可知：该几何体是一个由上下两部分组成的几何体，其中上面是一个圆锥，底面半径为 3，高为 4；下面是一个棱长分别为 3，3，4 的长方体．

因此该几何体的体积 $V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot9\cdot4+3\cdot3\cdot4=$（$12\pi+36$）$cm^3$.

故选 C.

5. 程序框图如图：如果上述程序运行的结果 S=1320，那么判断框中应填入（　　）



A．K＜10　B．K≤10　C．K＜11　D．K≤11

【考点】循环结构.

【分析】按照程序框图的流程写出前几次循环的结果判断出当 k 为何值时输出，得到判断框中的条件.

【解答】解：经过第一次循环得到 s=1×12=12，k=12﹣1=11 不输出，即 k 的值不满足判断框的条件

经过第二次循环得到 s=12×11=132，k=11﹣1=10 不输出，即 k 的值不满足判断框的条件

经过第三次循环得到 s=132×10=1320，k=10﹣1=9 输出，即 k 的值满足判断框的条件

故判断框中的条件是 k＜10

故选 A

6．等差数列$\{a_n\}$中，S_n是前 n 项和，且 $S_3=S_8$，$S_7=S_k$，则 k 的值为（　　）

A．4　B．11　C．2　D．12

【考点】等差数列的性质；等差数列的前 n 项和.

【分析】本题给出$\{a_n\}$为等差数列，$S_3=S_8$，利用等差数列的性质可求得 $a_6=0$，再通过代入验证的方法即可得正确答案.

【解答】解：∵$\{a_n\}$为等差数列，$S_3=S_8$，∴$a_4+\ldots+a_6+\ldots+a_8=0$，

∴$a_6=0$；将 k=4，代入 $S_7=S_k$，有 $S_7-S_4=a_5+a_6+a_7=3a_6=0$，满足题意；

若 k=2，$S_7=S_2$，则 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=0$，∴$a_5=0$，与题意不符；

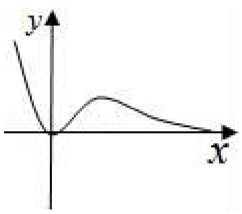
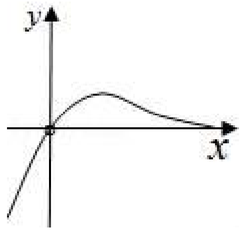
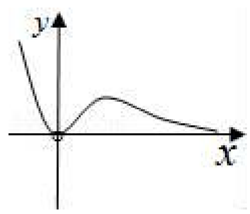
若 k=11，$a_8+a_9+a_{10}+a_{11}=0$，不能得出 $a_6=0$，

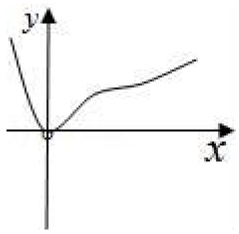
若 k=12，$a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=0$，∴$a_{10}=0$，与题意不符；

∴可以排除 B、C、D．

故选 A．

7．函数 $y=\frac{x^3}{3^x-1}$的图象大致是（　　）

A. 　B. 　C　． 

D. 

【考点】函数的图象．

【分析】根据函数的定义域，取值范围和取值符号，进行排除即可．

【解答】解：函数的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，排除 A．

当 $x\to -\infty$时，$y\to +\infty$，排除 B，

当 $x\to +\infty$时，$x^3<3^x-1$，此时 $y\to 0$，排除 D，

故选：C

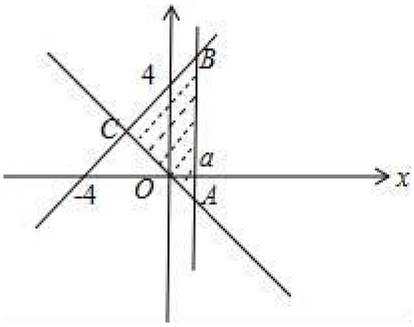
8．在平面直角坐标系中，不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 0\\x-y+4\geqslant 0\\x\leqslant a\end{cases}$，（a 是常数）表示的平面区域面积是 9，那么实数 a 的值为（　　）

A．$3\sqrt{2}+2$　B．$-3\sqrt{2}+2$　　C．－5　D．1

【考点】简单线性规划．

【分析】由约束条件在可行域，结合三角形的面积列式求得 a 的值．

【解答】解：由约束条件$\begin{cases}x+y\geqslant 0\\x-y+4\geqslant 0\\x\leqslant a\end{cases}$作出可行域如图，



联立$\begin{cases}x+y=0\\x-y+4=0\end{cases}$，解得 C（－2，2），

联立$\begin{cases}x=a\\x+y=0\end{cases}$，得 A（a，－a），

联立$\begin{cases}x=a\\x-y+4=0\end{cases}$，得 B（a，a+4），

∴|AB|=2a+4，

C 到 AB 的距离为 a+2，

由$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(2a+4)(a+2)=9$，解得：a=1.

故选：D.

9．若函数$f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$，为了得到函数 g（x）=sin2x 的图象，则只需将 f（x）的图象（　　）

A．向右平移$\frac{\pi}{6}$个长度单位 B．向右平移$\frac{\pi}{3}$个长度单位

C．向左平移$\frac{\pi}{6}$个长度单位 D．向左平移$\frac{\pi}{3}$个长度单位

【考点】函数 y=Asin（ωx+φ）的图象变换.

【分析】函数$f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$=sin（$\frac{\pi}{2}+2x-\frac{\pi}{6}$）=sin（2x+$\frac{\pi}{3}$），再根据图象左右平移规则即可判定.

【解答】解：函数$f(x)=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$=sin（$\frac{\pi}{2}+2x-\frac{\pi}{6}$）=sin（2x+$\frac{\pi}{3}$），为了得到函数 g（x）=sin2x 的图象，则只需将 f（x）的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个长度单位即可，故选：A.

10．已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的右顶点为 E，过双曲线的左焦点且垂

直于 x 轴的直线与该双曲线相交于 A、B 两点，若∠AEB=90°，则该双曲线的离心率 e 是（　　）

A．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$　B．2　C．$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$或 2　D．不存在

【考点】双曲线的简单性质．

【分析】求得双曲线的右顶点，设出左焦点，将 $x=-c$ 代入双曲线方程，求得交点 A，B 的坐标，再由题意可得 $k_{AE}\bullet k_{BE}=-1$，运用斜率公式和离心率公式计算即可得到所求值．

【解答】解：双曲线的右顶点为 E（a，0），

设双曲线的左焦点为（﹣c，0），

将 $x=-c$ 代入双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$，

可得 $y^2=b^2\left(\frac{c^2}{a^2}-1\right)=\frac{b^4}{a^2}$，

即 $y=\pm\frac{b^2}{a}$，

即有 A（﹣c，$\frac{b^2}{a}$），B（﹣c，$-\frac{b^2}{a}$），

由∠AEB=90°，可得 $k_{AE}\bullet k_{BE}=-1$，

即为$\frac{\frac{b^2}{a}}{-c-a}\bullet\frac{-\frac{b^2}{a}}{-c-a}=-1$，

化为 $a(c+a)=b^2$，

由 $b^2=c^2-a^2=(c-a)(c+a)$，

可得 $c-a=a$，即 $c=2a$，

则 $e=\frac{c}{a}=2$．

故选：B．

11．若关于 x 的方程$|x^3-ax^2|=x$ 有不同的四解，则 a 的取值范围为（　　）

A．a＞1　B．a＜1　C．a＞2　D．a＜2

【考点】根的存在性及根的个数判断．

【分析】关于 x 的方程$|x^3-ax^2|=x$ 的解必须是非负数，易知 $x=0$ 是方程$|x^3-ax^2|=x$

的一个解，其余三个根是方程方程$|x^2-ax|=1$的正数解，$\Rightarrow a>0$，且$\begin{cases}\Delta=a^2-4>0\\ |(\frac{a}{2})^2-a\times\frac{a}{2}|>1\end{cases}$，解之可得a的取值范围.

【解答】解：∵关于x的方程$|x^3-ax^2|=x$的解必须是非负数，易知x=0是方程$|x^3-ax^2|=x$的一个解，∴其余三个根是方程方程$|x^2-ax|=1$的正数解，

∴$a>0$，且$\begin{cases}\Delta=a^2-4>0\\ |(\frac{a}{2})^2-a\times\frac{a}{2}|>1\end{cases}\Rightarrow a>2$.

故选：C.

12．设f（x）是定义在R上的恒不为零的函数，对任意实数x，y∈R，都有f（x）•f（y）=f（x+y），若$a_1=\frac{1}{2}$，$a_n=f(n)$（$n\in N^*$），则数列$\{a_n\}$的前n项和S_n的取值范围是（　　）

A．$[\frac{1}{2}，2)$　　B．$[\frac{1}{2}，2]$ C．$[\frac{1}{2}，1)$　　D．$[\frac{1}{2}，1]$

【考点】抽象函数及其应用.

【分析】根据f（x）•f（y）=f（x+y），令x=n，y=1，可得数列$\{a_n\}$是以$\frac{1}{2}$为首项，以$\frac{1}{2}$为等比的等比数列，进而可以求得S_n，进而S_n的取值范围.

【解答】解：∵对任意x，y∈R，都有f（x）•f（y）=f（x+y），

∴令x=n，y=1，得f（n）•f（1）=f（n+1），

即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{f(n+1)}{f(n)}=f(1)=\frac{1}{2}$，

∴数列$\{a_n\}$是以$\frac{1}{2}$为首项，以$\frac{1}{2}$为等比的等比数列，

∴$a_n=f(n)=(\frac{1}{2})^n$，

∴$S_n=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=1-(\frac{1}{2})^n\in[\frac{1}{2}，1)$.

故选C.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．请把答案填在答题卷的相应位置

13．数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2a_n-1$，则$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=$__2^{n-1}__．

【考点】等比数列的通项公式；数列递推式．

【分析】由 $S_n=2a_n-1$ 和 $S_{n+1}=2a_{n+1}-1$ 相减得 $a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n$，所以$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，由此可求出数列$\{a_n\}$的通项公式．

【解答】解：由 $S_n=2a_n-1$，

得 $S_{n+1}=2a_{n+1}-1$，

二式相减得：$a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n$，

$\therefore\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，

∴数列$\{a_n\}$是公比为 2 的等比数列，

又$\because S_1=2a_1-1$，

$\therefore a_1=1$，

$\therefore a_n=2^{n-1}$．

故答案为：2^{n-1}．

14．半径为 R 的球放在房屋的墙角处，球与围成墙角的三个互相垂直的面都相切，若球心到墙角的距离是$\sqrt{3}$，则球的表面积是__4π__．

【考点】球的体积和表面积．

【分析】设球的半径为 R，当球放在墙角时，同时与两墙面和地面相切可知球心与墙角顶点可构成边长为 R 的正方体，则正方体对角线即为球心到墙角顶点的距离，由此求出球的半径，可得球的表面积．

【解答】解：根据题意可知球心与墙角顶点可构成边长为 R 的正方体

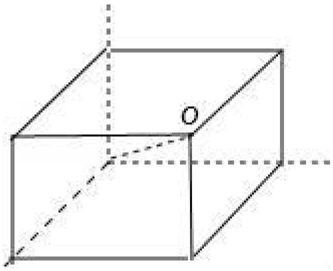
则球心到墙角顶点的距离为正方体的对角线即$\sqrt{3}R$

即$\sqrt{3}R=\sqrt{3}$

解得：R=1

故球的表面积是 $S=4\pi\cdot 1^2=4\pi$，

故答案为：4π．



15．抛物线 $y^2=ax$（a＞0）与直线 x=1 围成的封闭图形的面积为$\frac{4}{3}$，则二项式（$x+\frac{a}{x}$）^{20}展开式中含 x^{-16}项的系数是<u> 190 </u>．

【考点】抛物线的简单性质．

【分析】利用定积分，列出关于面积的式子，求出 a，再利用二项式定理求系数的方法求解．

【解答】解：已知抛物线 $y^2=ax$（a＞0）与直线 x=1 围成的封闭图形的面积为$\frac{4}{3}$，

利用定积分，面积 $S=\int_0^1[\sqrt{ax}-(-\sqrt{ax})]dx=\int_0^1 2\sqrt{ax}dx=\frac{4}{3}\sqrt{a}=\frac{4}{3}$，得 a=1，

利用二项式定理求系数的方法，$T_{r+1}=C_{20}^r\bullet x^{20-2r}$，

依题意令 20﹣2r=﹣16，得 r=18，即二项式展开式中含 x^{-16}项的系数为 $C_{20}^{18}=190$．

故答案为 190．

16．已知点 O 是△ABC 的外接圆圆心，且 AB=3，AC=4．若存在非零实数 x、y，使得$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，且 x+2y=1，则 cos∠BAC=<u> $\frac{2}{3}$ </u>．

【考点】平面向量的基本定理及其意义．

【分析】由$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，且 x+2y=1，可得$\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=y(\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB})$，利用向量的运算法则，取 AC 的中点 D，则$\overrightarrow{BO}=2y\overrightarrow{BD}$，再利用点 O 是△ABC 的外心，可得 BD⊥AC．即可得出．

【解答】解：如图所示，∵$\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，且 x+2y=1，

∴$\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=y(\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB})$，

∴$\overrightarrow{BO}=y(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$，

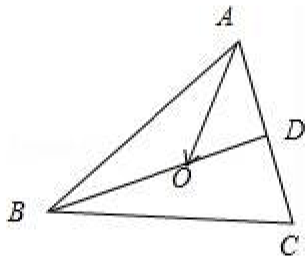
取 AC 的中点 D，则$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BD}$，

$\therefore \overrightarrow{BO}=2y\overrightarrow{BD}$，

又点 O 是△ABC 的外心，∴BD⊥AC.

在 Rt△BAD 中，$\cos\angle BAC=\frac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{2}{3}$，



三、解答题：本大题共 5 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请把答案写在答题卷的相应位置．

17．△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．向量$\overrightarrow{m}$=（a，$\sqrt{3}$ b）与$\overrightarrow{n}$=（cosA，sinB）平行．

（Ⅰ）求 A；

（Ⅱ）若 $a=\sqrt{7}$，b=2，求△ABC 的面积．

【考点】余弦定理的应用；平面向量共线（平行）的坐标表示．

【分析】（Ⅰ）利用向量的平行，列出方程，通过正弦定理求解 A；

（Ⅱ）利用 A，以及 $a=\sqrt{7}$，b=2，通过余弦定理求出 c，然后求解△ABC 的面积．

【解答】解：（Ⅰ）因为向量$\overrightarrow{m}$=（a，$\sqrt{3}$ b）与$\overrightarrow{n}$=（cosA，sinB）平行，

所以 $a\sin B-\sqrt{3}b\cos A=0$，由正弦定理可知：$\sin A\sin B-\sqrt{3}\sin B\cos A=0$，因为 $\sin B\neq 0$，

所以 $\tan A=\sqrt{3}$，可得 $A=\frac{\pi}{3}$；

（Ⅱ）$a=\sqrt{7}$，b=2，由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，可得 $7=4+c^2-2c$，解得 c=3，

△ABC 的面积为：$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

18．在数列{a_n}中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{c\cdot a_n+1}$（c 为常数，n∈N*），且 a_1，a_2，a_5 成

公比不为 1 的等比数列.

（Ⅰ）求证：数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是等差数列；

（Ⅱ）求 c 的值；

（Ⅲ）设 $b_n=a_na_{n+1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

【考点】等差数列与等比数列的综合；数列的求和.

【分析】（Ⅰ）通过已知条件，方程去倒数，即可推出数列满足等差数列的定义，说明数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是等差数列；

（Ⅱ）通过第一问，直接求出 a_1，a_2，a_5，利用等比数列直接求出 c 的值；

（Ⅲ）通过第二问，求出 a_n，然后利用 $b_n=a_na_{n+1}$，通过裂项法直接求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

【解答】解：（Ⅰ）因为 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{c\cdot a_n+1}$，所以 $a_n\neq 0$，

则 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{c\cdot a_n+1}{a_n}-\frac{1}{a_n}=c$，又 c 为常数，

∴数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 是等差数列；

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)c=1+(n-1)c$,

∵$a_1=1$，∴$a_2=\frac{1}{1+c}$，$a_5=\frac{1}{1+4c}$，

∵a_1，a_2，a_5 成公比不为 1 的等比数列，所以 $(\frac{1}{1+c})^2=\frac{1}{1+4c}$，

解得 c=0 或 c=2，当 c=0 时，$a_n=a_{n+1}$，不满足题意，舍去，

所以 c 的值为 2；

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知 c=2，∴ $a_n=\frac{1}{2n-1}$，

$b_n=a_na_{n+1}=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

$S_n=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})$

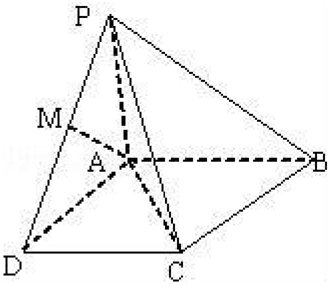
19. 如图，四棱锥 P﹣ABCD 中，PA⊥底面 ABCD，AB∥CD，AD=CD=1，∠BAD=120°，

PA=$\sqrt{3}$，∠ACB=90°，M 是线段 PD 上的一点（不包括端点）.

（Ⅰ）求证：BC⊥平面 PAC；

（Ⅱ）求二面角 D﹣PC﹣A 的正切值；

（Ⅲ）试确定点 M 的位置，使直线 MA 与平面 PCD 所成角θ的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$.



【考点】用空间向量求平面间的夹角；直线与平面垂直的判定；直线与平面所成的角.

【分析】（Ⅰ）由 PA⊥底面 ABCD，BC⊂平面 AC，知 PA⊥BC，由∠ACB=90°，知 BC⊥AC，由此能够证明 BC⊥平面 PAC.

（Ⅱ）取 CD 的中点 E，则 AE⊥CD，故 AE⊥AB，由 PA⊥底面 ABCD，知 PA⊥AE，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出二面角 D﹣PC﹣A 的正切值.

（Ⅲ）设 M（x，y，z），$\overrightarrow{PM}=m\overrightarrow{PD}$，则（x，y，z﹣$\sqrt{3}$）=m（$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$-\frac{1}{2}$，$-\sqrt{3}$），解得点 M（$\frac{\sqrt{3}}{2}m$，$-\frac{1}{2}m$，$\sqrt{3}-\sqrt{3}m$），由此能够推导出当 M 为 PD 的中点时，直线 AM 与平面 PCD 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$.

【解答】解：（Ⅰ）∵PA⊥底面 ABCD，BC⊂平面 AC，∴PA⊥BC，

∵∠ACB=90°，

∴BC⊥AC，又 PA∩AC=A，

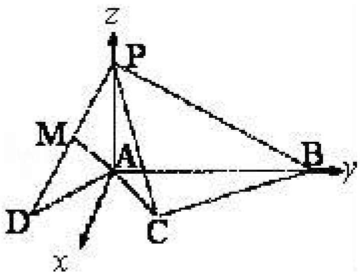
∴BC⊥平面 PAC.

（Ⅱ）取 CD 的中点 E，则 AE⊥CD，

∴AE⊥AB，又 PA⊥底面 ABCD，∴PA⊥AE，

建立如图所示空间直角坐标系，

则 A（0，，0，0），P（0，0，$\sqrt{3}$），C（$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{1}{2}$，0），D（$\frac{\sqrt{3}}{2}$，﹣$\frac{1}{2}$，0）



$\therefore \overrightarrow{AP}=(0,0,\sqrt{3}),\overrightarrow{AC}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},0),\overrightarrow{PD}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\sqrt{3}),\overrightarrow{PC}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ -\sqrt{3})$，

设平面 PAC 的一个法向量$\overrightarrow{n_1}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$，则$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{n_1}=0$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$，

$\therefore\begin{cases}\sqrt{3}z_1=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1=0\end{cases}$，$\therefore\overrightarrow{n_1}=(\sqrt{3},\ -3,\ 0)$.

设平面 PDC 的一个法向量$\overrightarrow{n_2}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$，则$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$，$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$，

$\therefore\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x_2+\frac{1}{2}y_2-\sqrt{3}z_2=0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_2-\frac{1}{2}y_2-\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，$\therefore\overrightarrow{n_2}=(2,\ 0,\ 1)$，

设二面角 D﹣PC﹣A 的平面角为θ，

$\therefore\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}>|=|\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}|=|\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{5}}|=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

故二面角 D﹣PC﹣A 的正切值为 2.

（Ⅲ）设 M（x，y，z），$\overrightarrow{PM}=m\overrightarrow{PD}$，

则（x，y，z﹣$\sqrt{3}$）=m（$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$-\frac{1}{2}$，$-\sqrt{3}$），

解得点 M（$\frac{\sqrt{3}}{2}m$，$-\frac{1}{2}m$，$\sqrt{3}-\sqrt{3}m$），即$\overrightarrow{AM}=$（$\frac{\sqrt{3}}{2}m$，$-\frac{1}{2}m$，$\sqrt{3}-\sqrt{3}m$），

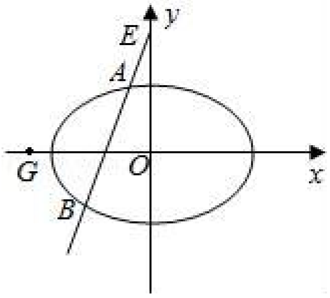
由 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+3(1-m)^2}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，得 m=1（不合题意舍去）或 m=$\frac{1}{2}$，

所以当 M 为 PD 的中点时，直线 AM 与平面 PCD 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$.

20．已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）过点$(0,\ \sqrt{2})$，且离心率 e 为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）设直线 $x=my-1$（$m\in R$）交椭圆 E 于 A，B 两点，判断点 $G(-\frac{9}{4}，0)$与以线段 AB 为直径的圆的位置关系，并说明理由.



【考点】直线与圆锥曲线的综合问题.

【分析】解法一：（1）由已知得$\begin{cases}b=\sqrt{2}\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得即可得出椭圆 E 的方程.

（2）设点 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），AB 中点为 H（x_0，y_0）. 直线方程与椭圆方程联立化为（m^2+2）$y^2-2my-3=0$，利用根与系数的关系中点坐标公式可得：$y_0=\frac{m}{m^2+2}$. $|GH|^2=(x_0+\frac{9}{4})^2+y_0^2$. $\frac{|AB|^2}{4}=\frac{(m^2+1)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}{4}$，作差$|GH|^2-\frac{|AB|^2}{4}$即可判断出.

解法二：（1）同解法一.

（2）设点 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），则$\overrightarrow{GA}=(x_1+\frac{9}{4}，y_1)$，$\overrightarrow{GB}=(x_2+\frac{9}{4}，y_2)$. 直线方程与椭圆方程联立化为（$m^2+2$）$y^2-2my-3=0$，计算$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=(x_1+\frac{9}{4})(x_2+\frac{9}{4})+y_1y_2$即可得出∠AGB，进而判断出位置关系.

【解答】解法一：（1）由已知得$\begin{cases}b=\sqrt{2}\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=2\\ b=c=\sqrt{2}\end{cases}$，

∴椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2）设点 A（x_1y_1），B（x_2，y_2），AB 中点为 H（x_0，y_0）.

由$\begin{cases}x=my-1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$，化为$(m^2+2)y^2-2my-3=0$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{-3}{m^2+2}$，$\therefore y_0=\dfrac{m}{m^2+2}$.

G$(-\dfrac{9}{4}, 0)$，

$\therefore |GH|^2=(x_0+\dfrac{9}{4})^2+y_0^2=(my_0+\dfrac{5}{4})^2+y_0^2=(m^2+1)y_0^2+\dfrac{5}{2}my_0+\dfrac{25}{16}$.

$\dfrac{|AB|^2}{4}=\dfrac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4}=\dfrac{(m^2+1)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}{4}=(m^2+1)(y_0^2-y_1y_2)$，

故$|GH|^2-\dfrac{|AB|^2}{4}=\dfrac{5}{2}my_0+(m^2+1)y_1y_2+\dfrac{25}{16}=\dfrac{5m^2}{2(m^2+2)}-\dfrac{3(m^2+1)}{m^2+2}+\dfrac{25}{16}=\dfrac{17m^2+2}{16(m^2+2)}>0$.

$\therefore |GH|>\dfrac{|AB|}{2}$，故G在以AB为直径的圆外.

解法二：（1）同解法一.

（2）设点A(x_1y_1)，B(x_2, y_2)，则$\overrightarrow{GA}=(x_1+\dfrac{9}{4}, y_1)$，$\overrightarrow{GB}=(x_2+\dfrac{9}{4}, y_2)$.

由$\begin{cases}x=my-1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$，化为$(m^2+2)y^2-2my-3=0$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{2m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\dfrac{-3}{m^2+2}$，

从而$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=(x_1+\dfrac{9}{4})(x_2+\dfrac{9}{4})+y_1y_2$

$=(my_1+\dfrac{5}{4})(my_2+\dfrac{5}{4})+y_1y_2$

$=(m^2+1)y_1y_2+\dfrac{5}{4}m(y_1+y_2)+\dfrac{25}{16}$

$=\dfrac{5m^2}{2(m^2+2)}-\dfrac{3(m^2+1)}{m^2+2}+\dfrac{25}{16}=\dfrac{17m^2+2}{16(m^2+2)}>0$.

$\therefore \overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}>0$，又$\overrightarrow{GA}$，$\overrightarrow{GB}$不共线，

∴∠AGB 为锐角.

故点 G $(-\frac{9}{4},0)$在以 AB 为直径的圆外.

21．已知函数 f（x）$=\ln x+ax^2$，g（x）$=\frac{1}{x}+x+b$，且直线 $y=-\frac{1}{2}$是函数 f（x）的一条切线.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）对任意的 $x_1\in[1,\sqrt{e}]$，都存在 $x_2\in[1,4]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，求 b 的取值范围.

【考点】利用导数研究曲线上某点切线方程；利用导数研究函数的单调性.

【分析】（Ⅰ）设直线 $y=-\frac{1}{2}$与 f（x）相切于点（x_0，$\ln x_0+ax_0^2$）（$x_0>0$），求得 f（x）的导数，由已知切线方程，可得切线的斜率为 0，及 $f(x_0)=-\frac{1}{2}$，解方程可得 a 的值；

（Ⅱ）由题意可得 f（x）在$[1,\sqrt{e}]$的值域包含于 g（x）在[1，4]的值域．运用导数，

求得单调性，可得值域，再由不等式解得即可.

【解答】解：（Ⅰ）设直线 $y=-\frac{1}{2}$与 f（x）相切于点（x_0，$\ln x_0+ax_0^2$）（$x_0>0$），

$f'(x)=\frac{1}{x}+2ax=\frac{2ax^2+1}{x}$，

依题意得$\begin{cases}\frac{2ax_0^2+1}{x_0}=0\\ \ln x_0+ax_0^2=-\frac{1}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_0=1\\ a=-\frac{1}{2}\end{cases}$，

所以 $a=-\frac{1}{2}$，经检验：$a=-\frac{1}{2}$符合题意；

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$，

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}-x=\frac{1-x^2}{x}$，

当 $x\in(1,\sqrt{e}]$时，$f'(x)<0$，所以 f（x）在$[1,\sqrt{e}]$上单调递减，

所以当 $x\in[1,\sqrt{e}]$时，$f(x)_{min}=f(\sqrt{e})=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e$，$f(x)_{max}=f(1)=-\frac{1}{2}$，

$g'(x)=\frac{1}{x^2}+1=\frac{-1+x^2}{x^2}$，

当 $x\in(1, 4]$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $[1, 4]$ 上单调递增，

所以当 $x\in(1, 4]$ 时，$g(x)_{min}=g(1)=2+b$，$g(x)_{max}=g(4)=\frac{17}{4}+b$，

依题意得 $[\frac{1}{2}-\frac{e}{2}, -\frac{1}{2}]\subseteq[2+b, \frac{17}{4}+b]$，

即有 $\begin{cases}2+b\leqslant\frac{1}{2}-\frac{e}{2}\\ \frac{17}{4}+b\geqslant-\frac{1}{2}\end{cases}$，

解得 $-\frac{19}{4}\leqslant b\leqslant-\frac{3}{2}-\frac{e}{2}$.

选修 4-4 坐标系及参数方程

22．已知曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=6\cos\theta$，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\theta=\frac{\pi}{4}$（$\rho\in R$），曲线 C_1，C_2 相交于 A，B 两点.

（Ⅰ）把曲线 C_1，C_2 的极坐标方程转化为直角坐标方程；

（Ⅱ）求弦 AB 的长度.

【考点】简单曲线的极坐标方程.

【分析】(Ⅰ)利用直角坐标与极坐标间的关系，即利用 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，$\rho^2=x^2+y^2$，进行代换即得曲线 C_2 及曲线 C_1 的直角坐标方程.

（Ⅱ）利用直角坐标方程的形式，先求出圆心（3，0）到直线的距离，最后结合点到直线的距离公式弦 AB 的长度.

【解答】解：（Ⅰ）曲线 C_2：$\theta=\frac{\pi}{4}$（$\rho\in R$）

表示直线 $y=x$，

曲线 C_1：$\rho=6\cos\theta$，即 $\rho^2=6\rho\cos\theta$

所以 $x^2+y^2=6x$ 即 $(x-3)^2+y^2=9$

（Ⅱ）∵圆心（3，0）到直线的距离 $d=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

$r=3$ 所以弦长 $AB=2\sqrt{r^2-d^2}=3\sqrt{2}$.

∴弦 AB 的长度 $3\sqrt{2}$.

选修 4-5：不等式选讲

23．已知函数 $f(x)=|x-1|+|2x+2|$.

（1）解不等式 $f(x)>5$；

（2）若关于 x 的方程 $\frac{1}{f(x)-4}=a$ 的解集为空集，求实数 a 的取值范围.

【考点】绝对值不等式的解法.

【分析】（1）化简函数的解析式为函数 $f(x)=|x-1|+|2x+2|=\begin{cases}3x+1, & x\geqslant 1\\ x+3, & -1<x<1\\ -3x-1, & x\leqslant -1\end{cases}$，分类讨论求得原不等式解集.

（2）由（1）中分段函数 f（x）的解析式可得 f（x）的单调性，由此求得函数 f（x）的值域，可得 $\frac{1}{f(x)-4}$ 的取值范围．再根据关于 x 的方程 $\frac{1}{f(x)-4}=a$ 的解集为空集，求得实数 a 的取值范围.

【解答】解：（1）函数 $f(x)=|x-1|+|2x+2|=\begin{cases}3x+1, & x\geqslant 1\\ x+3, & -1<x<1\\ -3x-1, & x\leqslant -1\end{cases}$，

当 $x\geqslant 1$ 时，由 $3x+5>5$ 解得：$x>\frac{4}{3}$；当 $-1<x<1$ 时，由 $x+3>5$ 得 $x>2$ （舍去）.

当 $x<-1$ 时，由 $-3x-1>5$，解得 $x<-2$.

所以原不等式解集为 $\{x|x<-2\ x>\frac{4}{3}\}$.

（2）由（1）中分段函数 f（x）的解析式可知：f（x）在区间 $(-\infty,\ -1)$ 上单调递减，

在区间 $(-1,+\infty)$ 上单调递增.

并且 f（x）的最小值为 $f(-1)=2$，所以函数 f（x）的值域为 $[2,+\infty)$，

从而 $f(x)-4$ 的取值范围是 $[-2,+\infty)$，

进而 $\frac{1}{f(x)-4}$ 的取值范围是 $(-\infty,\ -\frac{1}{2}]\cup(0,+\infty)$.

根据已知关于 x 的方程 $\frac{1}{f(x)-4}=a$ 的解集为空集，所以实数 a 的取值范围是 $(-\frac{1}{2},0]$.