2015-2016学年福建省莆田二十四中高三（上)期中数学试卷(文科)

一、选择题（每小题5分共70分）

1．复数$\frac{2i}{2-i}$=（　　）

A．$-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$ B．$\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i$ C．$\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$ D．$-\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i$

2．有关命题的说法错误的是（　　）

A．命题"若$x^2-3x+2=0$则$x=1$"的逆否命题为："若$x\neq1$，则$x^2-3x+2\neq0$"

B．"$x=1$"是"$x^2-3x+2=0$"的充分不必要条件

C．对于命题p：$\exists x_0\in R$，$x_0^2+x_0+1<0$．则¬p：$\forall x\in R$，$x^2+x+1\geqslant0$

D．若$p\wedge q$为假命题，则p、q均为假命题

3．函数f（x）=1﹣xlnx的零点所在区间是（　　）

A．（0，$\frac{1}{2}$） B．（$\frac{1}{2}$，1） C．（1，2） D．（2，3）

4．在△ABC中，若sinA：sinB：sinC=3：4：5，则cosA的值为（　　）

A．$\frac{3}{5}$　B．$\frac{4}{5}$　C．0　D．1

5．已知△ABC中，a=4，$b=4\sqrt{3}$，A=30°，则B等于（　　）

A．30°　B．30°或150°　C．60°　D．60°或120°

6．已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，且$\vec{a}+\lambda\vec{b}$与$\vec{a}-\lambda\vec{b}$垂直，则λ等于（　　）

A．$\frac{3}{5}$　B．$\pm\frac{3}{5}$ C．$\pm\frac{4}{5}$ D．$\pm\frac{9}{25}$

7．已知向量$\vec{a}$=（1，2），$\vec{b}$=（﹣2，m），若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则$|2\vec{a}+3\vec{b}|$等于（　　）

A．$\sqrt{70}$ B．$4\sqrt{5}$ C．$3\sqrt{5}$ D．$2\sqrt{5}$

8．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_{10}=100$，则a_2+a_9=（　　）

A．100　B．40　C．20　D．12

9．已知实数x，y满足$\begin{cases}x+y-1\geqslant0\\2x-y-2\leqslant0\\x-2y+2\geqslant0\end{cases}$，则x﹣3y的最小值为（　　）

A．﹣4　B．﹣3　C．0　D．1

10．正项等比数列$\{a_n\}$的公比为2，若$a_2a_{10}=16$，则a_9的值是（　　）

A．8　B．16　C．32　D．64

11．利用基本不等式求最值，下列各式运用正确的有（　　）个

（1）$y=x+\frac{4}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$

（2）$y=\sin x+\frac{3}{\sin x}\geqslant2\sqrt{\sin x\cdot\frac{3}{\sin x}}=2\sqrt{3}$（x∈（0，$\frac{\pi}{2}$）

（3）$y=\lg x+4\log_x10>2\sqrt{\lg x\cdot4\log_x10}=4$

（4）$y=3^{x}+\frac{4}{3^{x}}\geqslant 2\sqrt{3^{x}\cdot\frac{4}{3^{x}}}=4$.

A．0 个 B．1 个 C．2 个 D．3 个

12．点 P 是曲线 $y=x^{2}-\ln x$ 上任意一点，则点 P 到直线 $y=x-2$ 的距离的最小值是（　　）

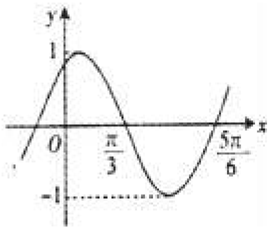
A．1　 B．$\sqrt{2}$ C．2　 D．$2\sqrt{2}$

二、填空题（每小题 5 分共 20 分）

13．函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$的定义域是____.

14．已知α是钝角，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，则 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$____.

15．已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\phi+\frac{\pi}{6}\right)$（$\omega>0$，$0<\phi\leqslant\frac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则φ的值为____.



16．函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$的单调递增区间是____.

三、解答题（题型注释）

17．已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_3=2$，前 3 项和 $S_3=\frac{9}{2}$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设等比数列$\{b_n\}$满足 $b_1=a_1$，$b_4=a_{15}$，求$\{b_n\}$前 n 项和 T_n.

18．某厂用甲、乙两种原料生产 A、B 两种产品，已知生产 1t A 产品，1t B 产品分别需要的甲、乙原料数，可获得的利润数及该厂现有原料数如下表所示．问：在现有原料下，A、B 产品应各生产多少才能使利润总额最大？列产品和原料关系表如下：

所需原料 产品 原料	A 产品 （1t）	B 产品 （1t）	总原料 （t）
甲原料（t）	2	5	10
乙原料（t）	6	3	18
利润（万元）	4	3	

19．已知函数 $f(x)=x^{3}-3x$；

（Ⅰ）求 f（x）的单调区间；

（Ⅱ）求 f（x）在区间$[-3，2]$上的最值.

20．已知函数 $f(x)=-2\sin^{2}x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+1$.

（1）求 f（x）的最小正周期及对称中心；

（2）若 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，求 f（x）的最大值和最小值.

21．已知函数 f（x）=$\frac{1}{2}x^2+a\ln x$（a∈R）.

（Ⅰ）若函数 f（x）的图象在 x=2 处的切线方程为 y=x+b，求 a，b 的值；

（Ⅱ）若函数 f（x）在（1，+∞）上为增函数，求 a 的取值范围.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22．已知直线的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，圆 M 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=-2+2\sin\theta\end{cases}$

（其中θ为参数）.

（Ⅰ）将直线的极坐标方程化为直角坐标方程；

（Ⅱ）求圆 M 上的点到直线的距离的最小值.

[选修 4-5：不等式选讲]

23．设函数 f（x）=|x+2|﹣|x﹣1|

（I）画出函数 y=f（x）的图象；

（II）若关于 x 的不等式 f（x）+4≥|1﹣2m|有解，求实数 m 的取值范围.

2015-2016学年福建省莆田二十四中高三 （上）期中数学试卷（文科）

参考答案与试题解析

一、选择题（每小题5分共70分）

1．复数$\frac{2i}{2-i}$=（　　）

A．$-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$ B．$\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i$ C．$\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$ D．$-\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i$

【考点】复数代数形式的乘除运算．

【分析】直接由复数的除法运算化简求值．

【解答】解：$\frac{2i}{2-i}=\frac{2i(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{-2+4i}{5}=-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$．

故选：A．

2．有关命题的说法错误的是（　　）

A．命题“若 $x^2-3x+2=0$ 则 $x=1$”的逆否命题为：“若 $x\neq1$，则 $x^2-3x+2\neq0$”

B．“$x=1$”是“$x^2-3x+2=0$”的充分不必要条件

C．对于命题p：$\exists x_0\in R$，$x_0^2+x_0+1<0$．则¬p：$\forall x\in R$，$x^2+x+1\geqslant0$

D．若p∧q为假命题，则p、q均为假命题

【考点】命题的真假判断与应用；四种命题间的逆否关系；命题的否定；必要条件、充分条件与充要条件的判断．

【分析】A：命题的逆否命题是首先对换命题的条件与结论再分别对新的条件与结论进行否定．B：因为方程 $x^2-3x+2=0$ 的解是 $x=1$ 或 $x=2$，所以B是正确的．C：存在性命题的否定是全称命题．D：根据真值表可得：若p∧q为假命题时则p、q至少有一个是假命题，故D错误．

【解答】解：A：命题的逆否命题是首先对换命题的条件与结论再分别对新的条件与结论进行否定，故A正确．

B：方程 $x^2-3x+2=0$ 的解是 $x=1$ 或 $x=2$，所以“$x=1$”是“$x^2-3x+2=0$”的充分不必要条件是正确的．

C：存在性命题的否定是全称命题，即把存在改为任意把小于改为大于等于，所以C正确．

D：根据真值表可得：若p∧q为假命题时则p、q至少有一个是假命题，故D错误．

故选D．

3．函数f（x）=1﹣xlnx的零点所在区间是（　　）

A．（0，$\frac{1}{2}$） B．（$\frac{1}{2}$，1） C．（1，2） D．（2，3）

【考点】函数零点的判定定理．

【分析】利用根的存在定理分别判断端点值的符合关系．

【解答】解：∵f（1）=1＞0，f（2）=1﹣2ln2=ln$\frac{e}{4}$＜0，

∴函数 $f(x)=1-x\ln x$ 的零点所在区间是（1，2）.
故选：C.

4．在△ABC 中，若 sinA：sinB：sinC=3：4：5，则 cosA 的值为（　　）

A．$\frac{3}{5}$　B．$\frac{4}{5}$　C．0　D．1

【考点】余弦定理．

【分析】已知等式利用正弦定理化简求出三边之比，设出三边长，利用余弦定理表示出 cosA，将三边长代入即可求出 cosA 的值．

【解答】解：已知等式利用正弦定理化简得：a：b：c=3：4：5，

设 a=3k，b=4k，c=5k，

由余弦定理得：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{16k^2+25k^2-9k^2}{40k^2}=\frac{4}{5}$.

故选：B．

5．已知△ABC 中，a=4，$b=4\sqrt{3}$，A=30°，则 B 等于（　　）

A．30°　B．30°或 150°　C．60°　D．60°或 120°

【考点】正弦定理．

【分析】△ABC 中由条件利用正弦定理求得 sinB 的值，再根据及大边对大角求得 B 的值．

【解答】解：△ABC 中，a=4，$b=4\sqrt{3}$，A=30°，由正弦定理可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即

$\frac{4}{\sin 30°}=\frac{4\sqrt{3}}{\sin B}$，

解得 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

再由 b＞a，大边对大角可得 B＞A，∴B=60°或 120°，

故选 D．

6．已知$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，且$\vec{a}+\lambda\vec{b}$与$\vec{a}-\lambda\vec{b}$垂直，则λ等于（　　）

A．$\frac{3}{5}$　B．$\pm\frac{3}{5}$ C．$\pm\frac{4}{5}$ D．$\pm\frac{9}{25}$

【考点】数量积判断两个平面向量的垂直关系．

【分析】由题意可得$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}-\lambda\vec{b})=0$，计算可得$|\vec{a}|^2-\lambda^2|\vec{b}|^2=0$，代入数据解λ的方程可得．

【解答】解：∵$\vec{a}+\lambda\vec{b}$与$\vec{a}-\lambda\vec{b}$垂直，∴$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}-\lambda\vec{b})=0$，

∴$\vec{a}^2-\lambda^2\vec{b}^2=0$，即$|\vec{a}|^2-\lambda^2|\vec{b}|^2=0$，

代入数据可得 $3^2-\lambda^2\times5^2=0$，

解得$\lambda=\pm\frac{3}{5}$

故选：B

7．已知向量$\vec{a}$=（1，2），$\vec{b}$=（﹣2，m），若$\vec{a}$∥$\vec{b}$，则$|2\vec{a}+3\vec{b}|$等于（　　）
A．$\sqrt{70}$ B．$4\sqrt{5}$ C．$3\sqrt{5}$ D．$2\sqrt{5}$
【考点】平面向量数量积的运算．
【分析】根据$\vec{a}$∥$\vec{b}$，算出$\vec{b}$=（﹣2，﹣4），从而得出$2\vec{a}+3\vec{b}$=（﹣4，﹣8），最后根据向量模的计算公式，可算出$|2\vec{a}+3\vec{b}|$的值．

【解答】解：∵$\vec{a}$=(1，2)，$\vec{b}$=(﹣2，m)且$\vec{a}$∥$\vec{b}$，

∴1×m=2×（﹣2），可得m=﹣4

由此可得$\vec{a}$=(1，2)，$\vec{b}$=(﹣2，﹣4)，

∴$2\vec{a}+3\vec{b}$=（﹣4，﹣8），得$|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{(-4)^2+(-8)^2}=4\sqrt{5}$

故选：B

8．设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$S_{10}=100$，则a_2+a_9=（　　）
A．100 B．40 C．20 D．12
【考点】等差数列的性质．
【分析】由题意和等差数列的前n项和公式求出a_1+a_{10}，根据等差数列的性质求出a_2+a_9的值．

【解答】解：∵$S_{10}=100$，∴$\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=100$，解得$a_1+a_{10}=20$，

由等差数列的性质得，$a_2+a_9=a_1+a_{10}=20$，
故选：C．

9．已知实数x，y满足$\begin{cases}x+y-1\geqslant 0\\2x-y-2\leqslant 0\\x-2y+2\geqslant 0\end{cases}$，则x﹣3y的最小值为（　　）

A．﹣4 B．﹣3 C．0 D．1
【考点】简单线性规划．
【分析】作出不等式组对应的平面区域，利用目标函数的几何意义，结合数形结合进行求解即可．

【解答】解：设z=x﹣3y，则得$y=\frac{1}{3}x-\frac{z}{3}$，

作出不等式组对应的平面区域如图（阴影部分）：

平移直线$y=\frac{1}{3}x-\frac{z}{3}$，

由图象可知当直线$y=\frac{1}{3}x-\frac{z}{3}$经过点A时，直线$y=\frac{1}{3}x-\frac{z}{3}$的截距最大，

此时z最小，

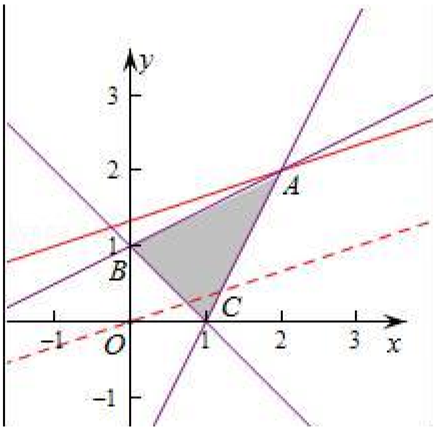
由$\begin{cases}2x-y-2=0\\x-2y+2=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$，即A（2，2）．

将A（2，2）代入目标函数z=x﹣3y，

得 $z=2-3\times2=2-6=-4$．

∴目标函数 $z=x-3y$ 的最小值是 -4．

故选：A．



10．正项等比数列$\{a_n\}$的公比为 2，若 $a_2a_{10}=16$，则 a_9 的值是（　　）

A．8　　B．16　　C．32　　D．64

【考点】等比数列的性质．

【分析】利用正项等比数列$\{a_n\}$的公比为 2，$a_2a_{10}=16$，求出 $a_1=\frac{1}{8}$，再利用 $a_9=a_1\times2^8$，即可得出结论．

【解答】解：∵正项等比数列$\{a_n\}$的公比为 2，$a_2a_{10}=16$，

∴$a_1^2\times2^{10}=16$，

∴$a_1=\frac{1}{8}$，

∴$a_9=a_1\times2^8=2^5=32$，

故选：C．

11．利用基本不等式求最值，下列各式运用正确的有（　　）个

（1）$y=x+\frac{4}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$

（2）$y=\sin x+\frac{3}{\sin x}\geqslant2\sqrt{\sin x\cdot\frac{3}{\sin x}}=2\sqrt{3}$（$x\in(0,\frac{\pi}{2})$）

（3）$y=\lg x+4\log_x10>2\sqrt{\lg x\cdot4\log_x10}=4$

（4）$y=3^x+\frac{4}{3^x}\geqslant2\sqrt{3^x\cdot\frac{4}{3^x}}=4$．

A．0 个　B．1 个　C．2 个　D．3 个

【考点】基本不等式．

【分析】直接根据基本不等式求最值时的前提条件“一正，二定，三相等”，对各命题作出判断．

【解答】解：根据基本不等式成立的条件，对各命题考察如下：

（1）$y=x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$，这个运算是错误的，

因为只有“正数”才能用基本不等式，即该式中“$x>0$”这个条件缺失；

（2）$y=\sin x+\frac{3}{\sin x}\geqslant\sqrt{\sin x\cdot\frac{3}{\sin x}}=2\sqrt{3}$（$x\in(0,\frac{\pi}{2})$），这个运算是错误的，

因为取最小值 $2\sqrt{3}$时，$\sin x=\sqrt{3}$，不等成立，即“=”无法取得；

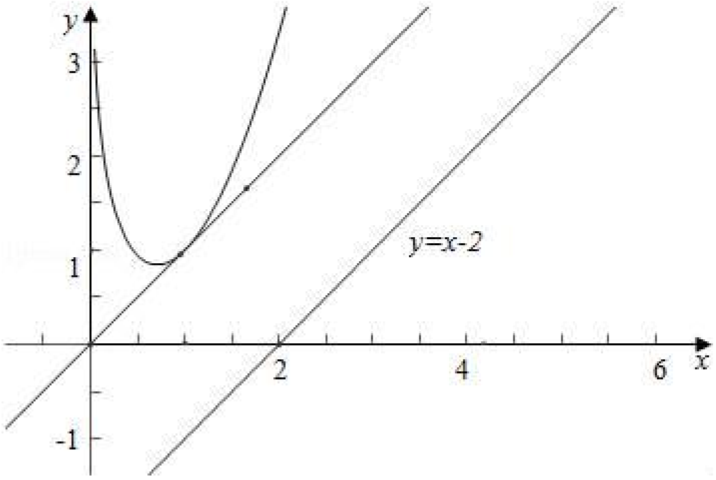
（3）$y=\lg x+4\log_x 10>2\sqrt{\lg x\cdot 4\log_x 10}=4$，这个运算是错误的，

因为只有“正数”才能用基本不等式，即该式中应限制“$x>1$”；

（4）$y=3^x+\frac{4}{3^x}\geqslant 2\sqrt{3^x\cdot\frac{4}{3^x}}=4$，这个运算是正确的，

符合条件“一正，二定，三相等”．
所以，只有（4）是正确的，
故答案为：B．

12．点 P 是曲线 $y=x^2-\ln x$ 上任意一点，则点 P 到直线 $y=x-2$ 的距离的最小值是（　　）
A．1　　B．$\sqrt{2}$　C．2　　D．$2\sqrt{2}$
【考点】利用导数研究曲线上某点切线方程；两点间的距离公式．
【分析】画出函数的图象，故当点 P 是曲线的切线中与直线 $y=x-2$ 平行的直线的切点时，然后求解即可．
【解答】解：由题意作图如下，



当点 P 是曲线的切线中与直线 $y=x-2$ 平行的直线的切点时，最近；

故令 $y'=2x-\frac{1}{x}=1$ 解得，$x=1$；

故点 P 的坐标为（1，1）；

故点 P 到直线 $y=x-2$ 的最小值为$\frac{|1-2-1|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$；

故选：B．

二、填空题（每小题 5 分共 20 分）

13．函数 f（x）$=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$的定义域是____．

【考点】函数的定义域及其求法．

【分析】由题意即分母不为零、偶次根号下大于等于零，列出不等式组求解，最后要用集合或区间的形式表示．

【解答】解：由题意，要使函数有意义，则$\begin{cases}x-1\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$，

解得，x≠1 且 x≥﹣2；

故函数的定义域为：{x|x≥﹣2 且 x≠1}，

故答案为：{x|x≥﹣2 且 x≠1}．

14．已知α是钝角，cosα=$-\frac{3}{5}$，则 sin（$\frac{\pi}{4}$﹣α）=____．

【考点】两角和与差的正弦函数．

【分析】由同角三角函数的平方关系，求出 sinα，再由两角差的正弦公式，即可得到答案．

【解答】解：由于α是钝角，cosα=$-\frac{3}{5}$，

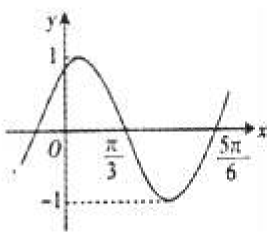
则 sinα=$\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=\frac{4}{5}$，

则 sin（$\frac{\pi}{4}$﹣α）=sin$\frac{\pi}{4}$cosα﹣cos$\frac{\pi}{4}$sinα

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\frac{3}{5}-\frac{4}{5})=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$．

故答案为：$-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

15．已知函数 f（x）=sin（ωx+ϕ+$\frac{\pi}{6}$）（ω>0，0<ϕ≤$\frac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则ϕ的值为____．



【考点】由 y=Asin（ωx+ϕ）的部分图象确定其解析式．

【分析】由函数图象可得 T，由周期公式从而可求ω，由点（$\frac{\pi}{3}$，0）在函数图象上，结合范围 0<ϕ≤$\frac{\pi}{2}$，即可解得ϕ的值．

【解答】解：由函数图象可得：T=2（$\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$）=π，从而可求ω=$\frac{2\pi}{\pi}$=2，

由点（$\frac{\pi}{3}$，0）在函数图象上，

所以：$\sin(2\times\frac{\pi}{3}+\phi+\frac{\pi}{6})=0$，

解得：$\phi=k\pi-\frac{5\pi}{6}$，$k\in Z$，

由 $0<\phi\leqslant\frac{\pi}{2}$，

从而可得：$\phi=\frac{\pi}{6}$.

故答案为：$\frac{\pi}{6}$.

16．函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$的单调递增区间是____.

【考点】利用导数研究函数的单调性.

【分析】求出函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$的导数为 y'的解析式，令 $y'>0$ 求得 x 的范围，即可得到函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$的单调递增区间.

【解答】解：由于函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$的导数为 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

令 $y'>0$ 可得 $\ln x<1$，解得 $0<x<e$，

故函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}$的单调递增区间是 $(0,e)$，

故答案为：$(0,e)$.

三、解答题（题型注释）

17．已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_3=2$，前 3 项和 $S_3=\frac{9}{2}$.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设等比数列$\{b_n\}$满足 $b_1=a_1$，$b_4=a_{15}$，求$\{b_n\}$前 n 项和 T_n.

【考点】等差数列与等比数列的综合.

【分析】（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则由已知条件列式求得首项和公差，代入等差数列的通项公式得答案；

（Ⅱ）求出 $b_1=1$，$b_4=a_{15}=\frac{15+1}{2}=8$，再求出等比数列的公比，由等比数列的前 n 项和公式求得$\{b_n\}$前 n 项和 T_n.

【解答】解：（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则由已知条件得：

$\begin{cases}a_1+2d=2\\3a_1+\frac{3\times 2}{2}d=\frac{9}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=1\\d=\frac{1}{2}\end{cases}$.

代入等差数列的通项公式得：$a_n=1+\frac{n-1}{2}=\frac{n+1}{2}$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）得，$b_1=1$，$b_4=a_{15}=\frac{15+1}{2}=8$.

设$\{b_n\}$的公比为 q，则 $q^3=\frac{b_4}{b_1}=8$，从而 q=2，

故$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$.

18．某厂用甲、乙两种原料生产 A、B 两种产品，已知生产 1t A 产品，1t B 产品分别需要的甲、乙原料数，可获得的利润数及该厂现有原料数如下表所示．问：在现有原料下，A、B 产品应各生产多少才能使利润总额最大？列产品和原料关系表如下：

所需原料 产品 原料	A 产品 （1t）	B 产品 （1t）	总原料 （t）
甲原料（t）	2	5	10
乙原料（t）	6	3	18
利润（万元）	4	3	

【考点】简单线性规划的应用．

【分析】先设生产 A、B 两种产品分别为 xt，yt，其利润总额为 z 万元，列出约束条件，再根据约束条件画出可行域，设 z=4x+3y，再利用 z 的几何意义求最值，只需求出直线 z=4x+3y 过可行域内的点时，从而得到 z 值即可．

【解答】解析：设生产 A、B 两种产品分别为 xt，yt，其利润总额为 z 万元，

根据题意，可得约束条件为$\begin{cases}2x+5y\leqslant 10\\6x+3y\leqslant 18\\x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\end{cases}$ …

作出可行域如图：….

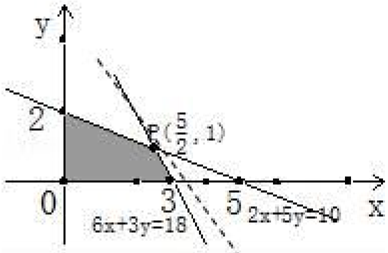
目标函数 z=4x+3y，

作直线 l_0：4x+3y=0，再作一组平行于 l_0 的直线 l：4x+3y=z，当直线 l 经过 P 点时 z=4x+3y 取得最大值，….

由$\begin{cases}2x+5y=10\\6x+3y=18\end{cases}$，解得交点 P $(\frac{5}{2},1)$….

所以有 $z_P=4\times\frac{5}{2}+3\times 1=13$(万元)…

所以生产 A 产品 2.5t，B 产品 1t 时，总利润最大，为 13 万元．…



19．已知函数 f（x）$=x^3-3x$；

（Ⅰ）求 f（x）的单调区间；

（Ⅱ）求 f（x）在区间[－3，2]上的最值．

【考点】利用导数求闭区间上函数的最值；利用导数研究函数的单调性．

【分析】（Ⅰ）先求出函数 f（x）$=x^3-3x$ 的导函数 f′（x），分别令 f′（x）＞0 和 f′（x）＜0 便可求出函数 f（x）的单调区间；

（Ⅱ）分别求出两个短点 f（－3）和 f（2）的值以及极值 f（－1）和 f（1）的值，比较一下便可求出 f（x）在区间[－3，2]上的最大值和最小值．

【解答】解：（I）∵f（x）$=x^3-3x$，

∴f′（x）$=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$．

令 f′（x）=0，得 x=－1，x=1．

若 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，则 f′（x）＞0，

故 f（x）在（－∞，－1）上是增函数，f（x）在（1，+∞）上是增函数，

若 $x\in(-1,1)$，则 f′（x）＜0，

故 f（x）在（－1，1）上是减函数；

（II）∵f（－3）=－18，f（－1）=2，f（1）=－2，f（2）=2，

∴当 x=－3 时，f（x）在区间[－3，2]取到最小值为－18．

∴当 x=－1 或 2 时，f（x）在区间[－3，2]取到最大值为 2．

20．已知函数 f（x）$=-2\sin^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+1$．

（1）求 f（x）的最小正周期及对称中心；

（2）若 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，求 f（x）的最大值和最小值．

【考点】三角函数中的恒等变换应用；三角函数的周期性及其求法；正弦函数的定义域和值域；三角函数的最值．

【分析】（1）先通过两角和公式对函数解析式进行化简，得 f（x）$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，根据正弦函数的周期性和对称性可的 f（x）的最小正周期及对称中心．

（2）根据正弦函数的单调性及 x 的取值范围进而求得函数的最值．

【解答】解：（1）$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$

∴f（x）的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

令 $\sin(2x+\frac{\pi}{6})=0$，则 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}(k\in Z)$，

∴f（x）的对称中心为 $(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12},0)$，$(k\in Z)$；

（2）$\because x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]\therefore -\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$

$\therefore -\frac{1}{2}\leqslant\sin(2x+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$

∴ $-1\leqslant f(x)\leqslant 2$

∴当 $x=-\frac{\pi}{6}$时，f（x）的最小值为－1；

当 $x=\frac{\pi}{6}$时，f（x）的最大值为 2．

21．已知函数 f（x）$=\frac{1}{2}x^2+a\ln x$（a∈R）．

（Ⅰ）若函数 f（x）的图象在 x=2 处的切线方程为 y=x+b，求 a，b 的值；

（Ⅱ）若函数 f（x）在（1，+∞）上为增函数，求 a 的取值范围．

【考点】利用导数研究曲线上某点切线方程；利用导数研究函数的单调性．

【分析】（Ⅰ）函数 f（x）的图象在 x=2 处的切线方程为 y=x+b 可知：$f'(2)=2+\frac{a}{2}=1$，f（2）=2+aln2=2+b，可解 ab 的值；

（Ⅱ）若函数 f（x）在（1，+∞）上为增函数，则 $f'(x)=x+\frac{a}{x}\geqslant 0$ 在（1，+∞）上恒成立，分离变量可求 a 的范围．

【解答】解：（Ⅰ）已知函数 f（x）$=\frac{1}{2}x^2+a\ln x$，则导数 $f'(x)=x+\frac{a}{x}$

函数 f（x）的图象在 x=2 处的切线方程为 y=x+b 可知：

$f'(2)=2+\frac{a}{2}=1$，f（2）=2+aln2=2+b，解得 a=－2，b=－2ln2

（Ⅱ）若函数 f（x）在（1，+∞）上为增函数，

则 $f'(x)=x+\frac{a}{x}\geqslant 0$ 在（1，+∞）上恒成立，分离变量得

$a\geqslant -x^2$，而（$-x^2$）在 x∈（1，+∞）恒小于－1，即得 a≥－1

故 a 的取值范围为：a≥－1．

[选修 4-4：坐标系与参数方程]

22．已知直线的极坐标方程为 $\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，圆 M 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=-2+2\sin\theta\end{cases}$（其中θ为参数）．

（Ⅰ）将直线的极坐标方程化为直角坐标方程；

（Ⅱ）求圆 M 上的点到直线的距离的最小值．

【考点】圆的参数方程；直线与圆的位置关系；简单曲线的极坐标方程．

【分析】（Ⅰ）以极点为原点，极轴为 x 轴正半轴建立直角坐标系，利用和角的正弦函数，即可求得该直线的直角坐标方程；

（Ⅱ）圆 M 的普通方程为：$x^2+(y+2)^2=4$，求出圆心 M（0，－2）到直线 x+y－1=0 的距离，即可得到圆 M 上的点到直线的距离的最小值．

【解答】解：（Ⅰ）以极点为原点，极轴为 x 轴正半轴建立直角坐标系．

$\because \rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\therefore\frac{\sqrt{2}}{2}(\rho\sin\theta+\rho\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴ρsinθ+ρcosθ=1．

∴该直线的直角坐标方程为：x+y－1=0．

（Ⅱ）圆 M 的普通方程为：$x^2+(y+2)^2=4$

圆心 M（0，﹣2）到直线 x+y﹣1=0 的距离 $d=\frac{|0-2-1|}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

所以圆 M 上的点到直线的距离的最小值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}-2$.

[选修 4-5：不等式选讲]

23．设函数 f（x）=|x+2|﹣|x﹣1|

（I）画出函数 y=f（x）的图象；

（II）若关于 x 的不等式 f（x）+4≥|1﹣2m|有解，求实数 m 的取值范围．

【考点】带绝对值的函数．

【分析】(I）先将原函数式可化为一个分段函数的形式，再分段画出函数在各段上的图象即得原函数的图象．

（II）关于 x 的不等式 f（x）+4≥|1﹣2m|有解等价于：$(f(x)+4)_{max}\geq|1-2m|$，再根据分段函数的图象，确定函数的最大值，从而可求实数 m 的取值范围．

【解答】解：(I）函数 f（x）可化为：...3′

其图象如下：...5′

（II）关于 x 的不等式 f（x）+4≥|1﹣2m|有解等价于：

$(f(x)+4)_{max}\geq|1-2m|$． ...6′

由（I）可知 $f(x)_{max}=3$，

（也可由|f（x）|=||x+2|﹣|x﹣1||≤|（x+2）﹣（x﹣1|）|=3，得 $f(x)_{max}=3$）...8′

于是|1﹣2m|≤7，

解得实数 m 的取值范围：m∈[﹣3，4]...10′