

7. 下列结论正确的是 ()

A. 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 是等比数列

B. 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 是等差数列

C. 若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且 m, n, p, q 均是正整数, 则“ $m+n=p+q$ ”是“ $a_m+a_n=a_p+a_q$ ”的充要条件

D. 满足 $a_{n+1}=qa_n$ 的数列 $\{a_n\}$ 为等比数列

8. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 当 $x > 0$ 时, $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} > 0$, 且 $f(-2)=0$, 则不等式 $\frac{f(x)}{x} > 0$ 的解集是 ()

A. $(-2,0) \cup (0,2)$

B. $(-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

C. $(-2,0) \cup (2,+\infty)$

D. $(-\infty,-2) \cup (0,2)$

二、多选题。(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 漏选得 2 分, 共 20 分)

9. (多选) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=3, a_{n+1}=-\frac{1}{a_n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$, 下列选项中能使 $a_n=3$ 的 n 为 ()

A. 17

B. 16

C. 8

D. 7

10. 若 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $S_n=2a_n+1, (n \in \mathbf{N}^*)$, 则下列说法正确的是

A. $a_5=-16$

B. $S_5=-63$

C. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列

D. 数列 $\{S_n+1\}$ 是等比数列

11. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+4$, 则 ()

A. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

B. $x=-2$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. $f(x)$ 有三个零点

D. $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上最大值是 4

12. “提丢斯数列”是 18 世纪由德国数学家提丢斯给出的, 具体如下: 取 0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, ... 这样一组数, 容易发现, 这组数从第 3 项开始, 每一项是前一项的 2 倍, 将这组数的每一项加上 4, 再除以 10, 就得到“提丢斯数列”: 0.4, 0.7, 1.0, 1.6, 2.8, 5.2, 10.0, ..., 则下列说法中正确的是 ()

A. “提丢斯数列”是等比数列

B. “提丢斯数列”的第 99 项为 $\frac{3 \times 2^{97} + 4}{10}$

C. “提丢斯数列”的前 31 项和为 $\frac{3 \times 2^{30}}{10} + \frac{121}{10}$

D. “提丢斯数列”中，不超过 20 的有 9 项

三、填空题. (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_7 a_{12} = 5$, 则 $a_8 a_9 a_{10} a_{11} =$ _____.

14. 曲线 $y = \ln(2x-1)$ 上的点到直线 $2x - y + 3 = 0$ 的最短距离是 _____.

15. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1 = -1$, $a_{n+1} = S_n S_{n+1}$, 则 $S_n =$ _____.

16. 设函数 $f(x) = x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x + 5$, 若对任意的 $x \in [-1, 2]$, 都有 $f(x) > a$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

四、解答题. (本大题共 6, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 设 $\{a_n\}$ 是公比为正数的等比数列, $a_1 = 2$, $a_2 = a_1 + 4$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $\{b_n\}$ 是首项为 1, 公差为 2 的等差数列, 求数列 $\{a_n + b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. 已知函数 $f(x) = \ln x + x^2$

(1) 求 $h(x) = f(x) - 3x$ 的极值;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - ax$ 在定义域内为增函数, 求实数 a 的取值范围.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, S_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和, 且 $S_n = n^2 + 2n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{2}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

20. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{2x-2}{x+1}$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 的零点个数;

(2) 设 $g(x) = f(x) - \frac{4+a}{x+1} + 2 (a \in \mathbf{R})$, 若 x_1, x_2 是函数 $g(x)$ 的两个极值点, 求实数 a 的取值范围.

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , $a_1 = 1$, 且满足 $2S_n = na_{n+1}$.

(1) 求 a_n ;

(2) 若 $b_n = (a_n + 1) \cdot 2^{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

22. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 恰好是双曲线 $12x^2 - 4y^2 = 3$ 的一个焦点, O 是坐标原点.

(1) 求抛物线的方程;

(2) 已知直线 $l: y = 2x - 2$ 与抛物线相交于 A, B 两点,

①求 $|AB|$;

②若 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = m\overrightarrow{OD}$, 且 D 在抛物线上, 求实数 m 的值.

